Linear System Theory

Frequency Analysis of

LTI system

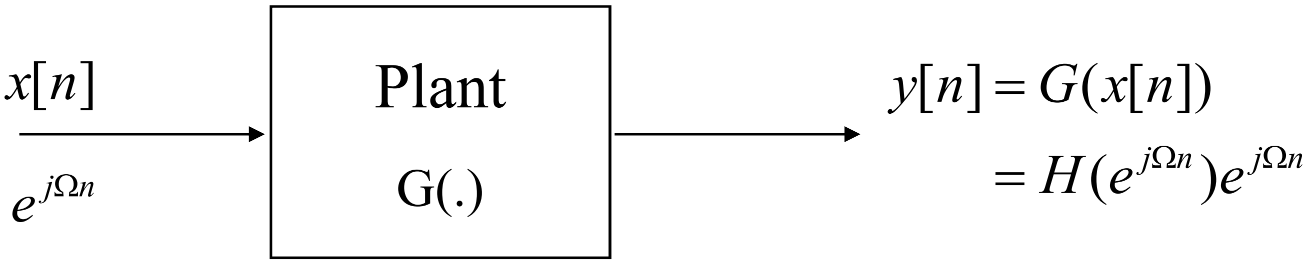
순수정현파신호에 대한 주파수응답

- 주파수응답: 입력이 이산시간 순수정현파일 때 입력 주파수에 따른 출력순수정현파신호의 크기, 위상 등의 변화

- **Input :** $x[n] = e^{j\Omega n}$

- **Output :** $y[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k}, h[n] = G(\delta[n])$$



순수정현파신호에 대한 주파수응답

- **Convolution :** $$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- 순수정현파 신호에 대한 **Output :**

$$y[n] = e^{j\Omega n} * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega(n-k)} h[k]$$

$$= e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{e^{-j\Omega k} h[k]\}$$

$$= H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n}$$

- 순수정현파 신호에 대한 주파수 응답 **:**

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k}, h[n] = G(\delta[n])$$

순수정현파신호에 대한 주파수응답

❑ 순수정현파 신호에 대한 주파수 응답 :

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k} = \left\|H(e^{j\Omega})\right\| e^{j\angle H(e^{j\Omega})},$$

$$h[n] = G(\delta[n])$$

❑ **Magnitude Response :** $\left\|H(e^{j\Omega})\right\| = \sqrt{[\mathrm{Re}\{H(e^{j\Omega})\}]^2 + [\mathrm{Im}\{H(e^{j\Omega})\}]^2}$

❑ **Phase Response :** $\angle H(e^{j\Omega}) = \tan^{-1}(\mathrm{Im}\{H(e^{j\Omega})\} / \mathrm{Re}\{H(e^{j\Omega})\})$

❑ 순수정현파 신호에 대한 **Output :**

$$y[n] = e^{j\Omega n} * h[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} = \left\|H(e^{j\Omega})\right\| e^{j\angle H(e^{j\Omega})} e^{j\Omega n}$$

$$= \left\|H(e^{j\Omega})\right\| e^{j\{\Omega n + \angle H(e^{j\Omega})\}}$$

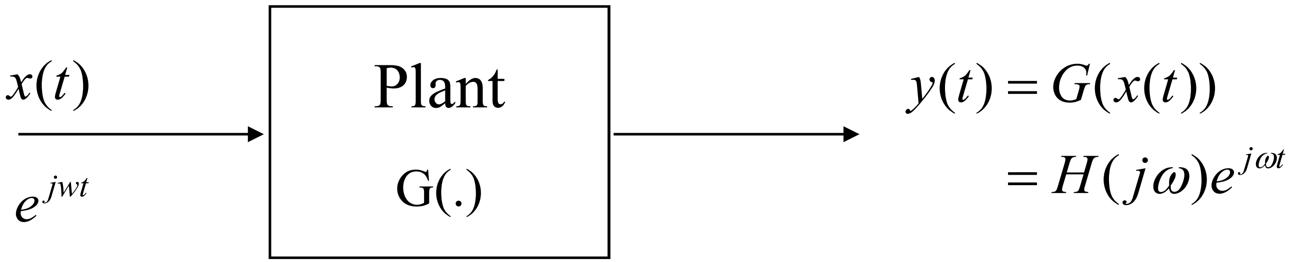
순수정현파신호에 대한 주파수응답

- 주파수응답: 입력이 연속시간 순수정현파일 때 입력 주파수에 따른 출력순수정현파신호의 크기, 위상 등의 변화

- **Input :** $x(t)=e^{jwt}$

- **Output :** $y(t)=G\{x(t)\}=H(j\omega)e^{j\omega t}$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau,\, h(t)=G(\delta(t))$$



순수정현파신호에 대한 주파수응답

- **Convolution** : $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

- 순수정현파 신호에 대한 **Output :**

$$y(t) = e^{jwt} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jw(t-\tau)} h(\tau)d\tau$$

$$= e^{jwt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw\tau} h(\tau)d\tau$$

$$= H(jw)e^{jwt}$$

- 순수정현파 신호에 대한 주파수 응답 **:**

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-jw\tau}d\tau, h(t) = G(\delta(t))$$

순수정현파신호에 대한 주파수응답

- 순수정현파 신호에 대한 주파수 응답 :

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jw\tau} d\tau = \|H(jw)\| e^{j\angle H(jw)},$$

$$h(t) = G(\delta(t))$$

- **Magnitude Response :** $\|H(jw)\| = \sqrt{[\mathrm{Re}\{H(jw)\}]^2 + [\mathrm{Im}\{H(jw)\}]^2}$
- **Phase Response :** $\angle H(jw) = \tan^{-1}(\mathrm{Im}\{H(jw)\} / \mathrm{Re}\{H(jw)\})$

- 순수정현파 신호에 대한 **Output :**

$$y(t) = e^{jwt} * h(t) = H(jw) e^{jwt} = \|H(jw)\| e^{j\angle H(jw)} e^{jwt}$$

$$= \|H(jw)\| e^{j\{wt + \angle H(jw)\}}$$

Transfer Function와 주파수 응답

- 주파수 응답 : $$H(jw)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-jw\tau}d\tau,\ h(t)=G(\delta(t))$$
- Transfer function : $$T(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$
- Impulse response 의 라플라스변환 : $$Y(s)=H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$
$$=T(s)X(s)=T(s),\ X(s)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s)=T(s)}$$

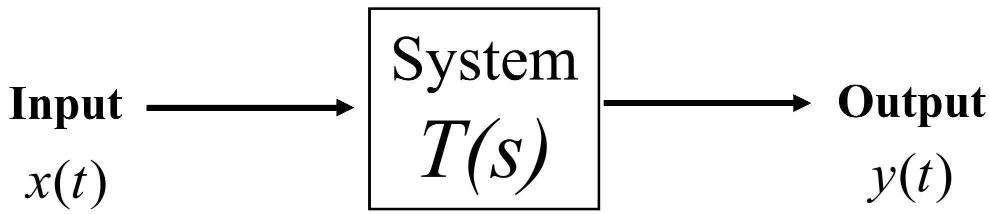
Input $x(t)$ → System $T(s)$ → **Output** $y(t)$

Transfer Function와 주파수 응답

$$\boxed{H(s) = T(s)}$$

- 주파수 응답을 전달함수로 부터 라플라스 변수 s 대신 jw 를 대입하여 구함.

- 주파수응답: $H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-jw\tau}d\tau = H(s)\big|_{s=jw} = T(s)\big|_{s=jw}$



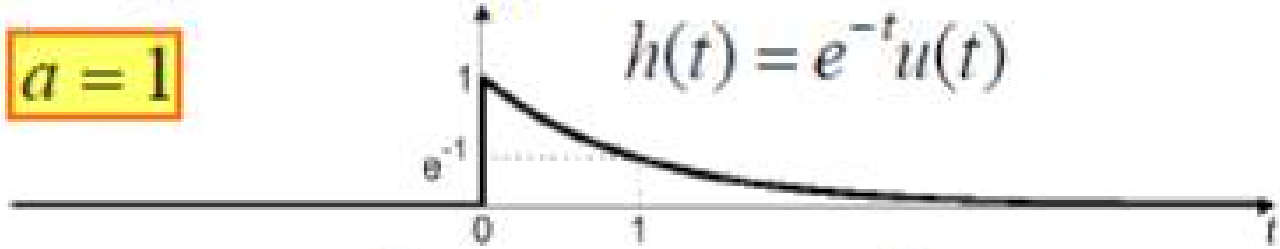
주파수 응답 예제

$$h(t) = e^{-at}u(t) \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

- Suppose that h(t) is:

$a = 1$

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

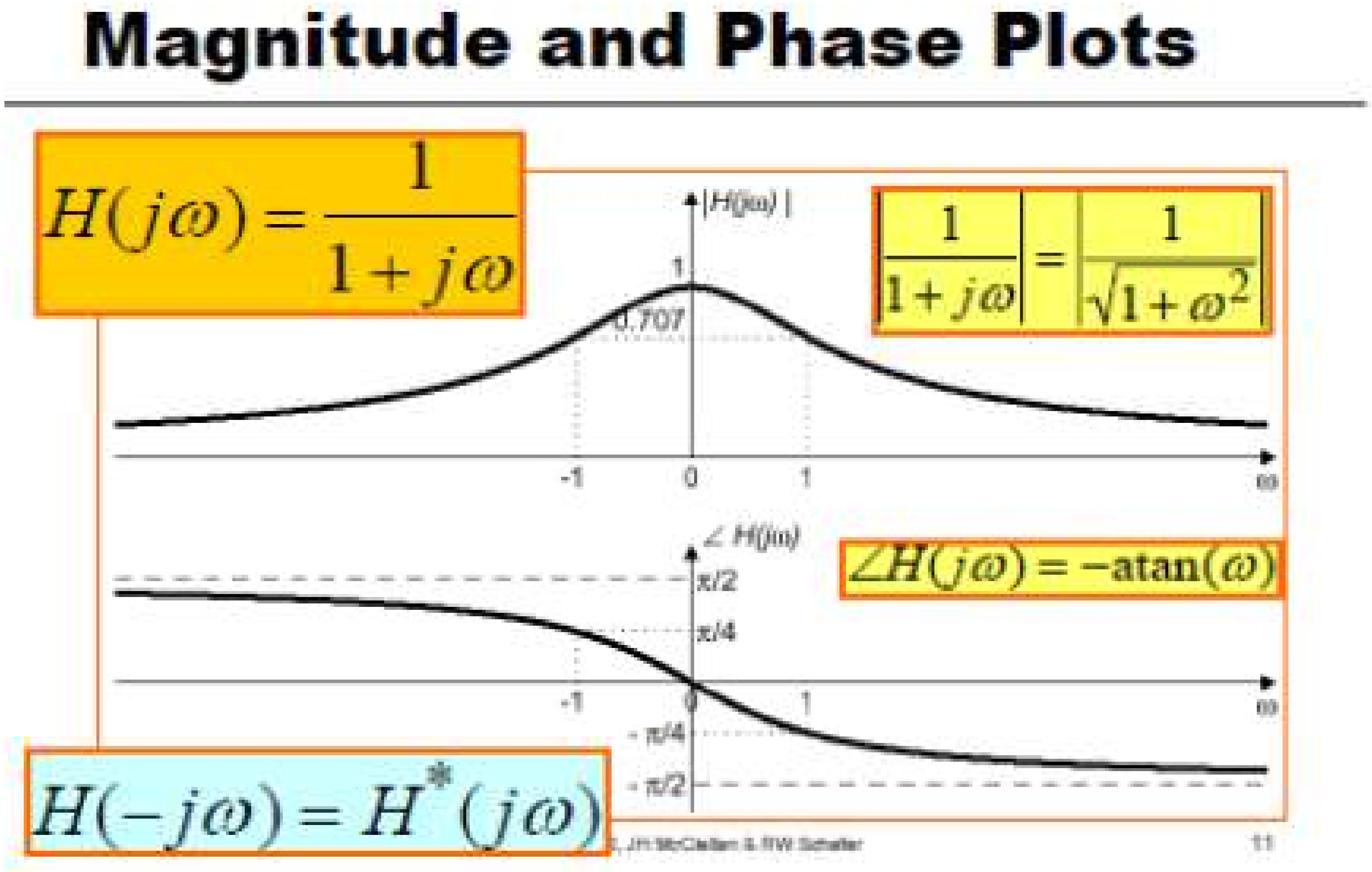


$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)\tau}d\tau$$

$a > 0$

$$H(j\omega) = \left. \frac{e^{-(a+j\omega)\tau}}{-(a+j\omega)} \right|_0^{\infty} = \left. \frac{e^{-a\tau}e^{-j\omega\tau}}{-(a+j\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega}$$

주파수 응답 예제


Magnitude and Phase Plots
$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$
$\left|\frac{1}{1+j\omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$
$|H(j\omega)|$
1
0.707
-1
0
1
ω
$\angle H(j\omega)$
$\angle H(j\omega) = -\mathrm{atan}(\omega)$
$\pi/2$
$\pi/4$
$-\pi/4$
$-\pi/2$
$H(-j\omega) = H^{*}(j\omega)$
JH McClellan & RW Schafer
11

주파수 응답 예제

Cosine Input

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

$$y(t) = H(j\omega_0)\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + H(-j\omega_0)\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

Since $H(-j\omega_0) = H^*(j\omega_0)$

$$\boxed{y(t) = A\left|H(j\omega_0)\right|\cos(\omega_0 t + \phi + \angle H(j\omega_0))}$$