Linear System Theory

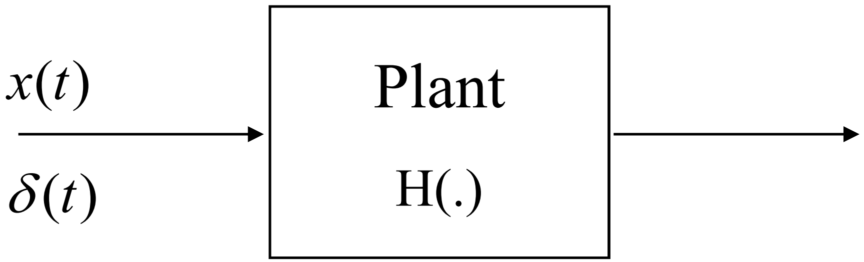
Impulse Response & Convolution

Impulse Response

- **Impulse Response :** 입력이 임펄스 신호일 때 출력

- **Input :** $x(t) = \delta(t)$

- **Output :** $y(t) = H\{x(t)\} = H\{\delta(t)\}$



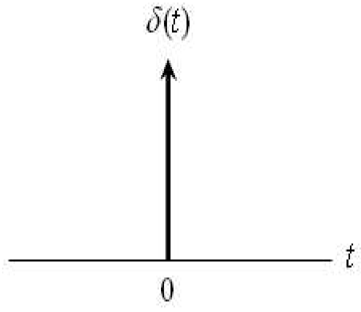
$$y(t) = H(x(t))$$
$$h(t) = H(\delta(t))$$

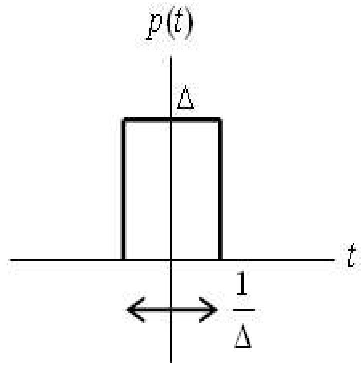
Impulse Response

- **Impulse Function : Physically not implementable**

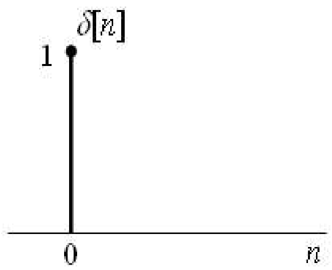
- **Continuous Time :** $x(t) = \delta(t)$

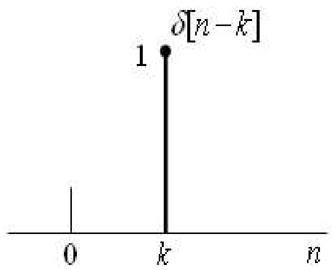
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to \infty} p(t)$$





- **Discrete Time :** $x[n] = \delta[n]$





선형시불변(LTI) 시스템의 시간영역 해석

- 임펄스 응답 – 시간이 t=0 또는 n=0에서 인가된 임펄스 입력에 대한 LTI 시스템의 출력
- 어떤 LTI 시스템이든 임펄스 응답으로 완벽하게 설명된다.
- 임펄스 신호 – 지속시간이 짧고 진폭이 큰 펄스 신호 발생
- 선형시스템 – 가중 중첩된 시간 변이 임펄스 입력이 시간 변이된 각 임펄스에 대한 시스템 응답의 가중 중첩으로 표현
- 시불변시스템 – 시간 변이된 임펄스 입력에 대한 시스템 응답은 순수한 임펄스 입력에 대한 시스템 응답이 시간 변이된 형태로 표현
- 콘볼루션 합, 콘볼루션 적분 (convolution)

임펄스 신호를 이용한 입력신호의 표현

❑ 입력 신호의 임펄스 신호를 이용한 표현

– 한 순간에만 값을 갖고 나머지 시간에는 값이 0 이 되는 신호들의 합으로 표시

- 임펄스 신호: $$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$
- 신호 :

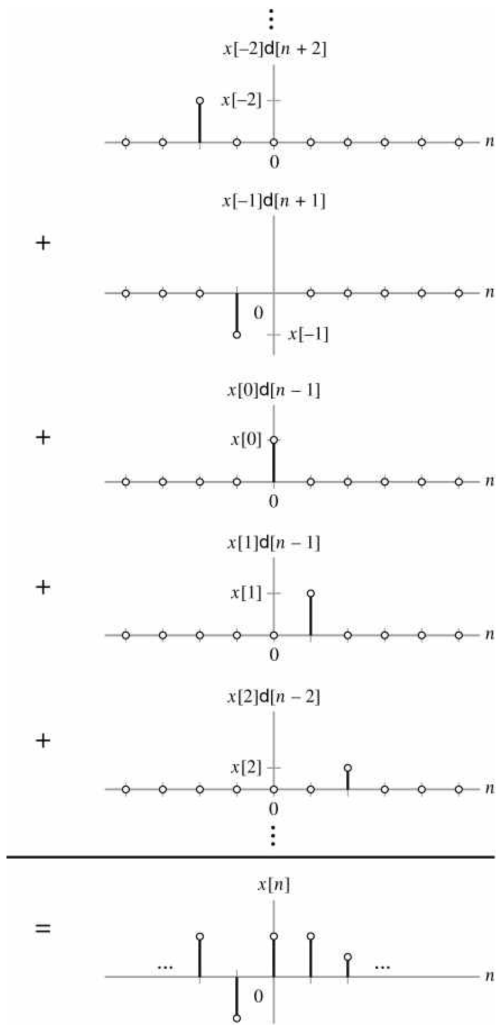
– n=0 엣만 값을 갖는 성분 신호

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

– n=k 엣만 값을 갖는 성분 신호

$$x[n]\delta[n-k]=x[k]\delta[n-k]$$

$$x[n]=\cdots+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]$$
$$+x[1]\delta[n-1]x[2]\delta[n-2]+\cdots$$

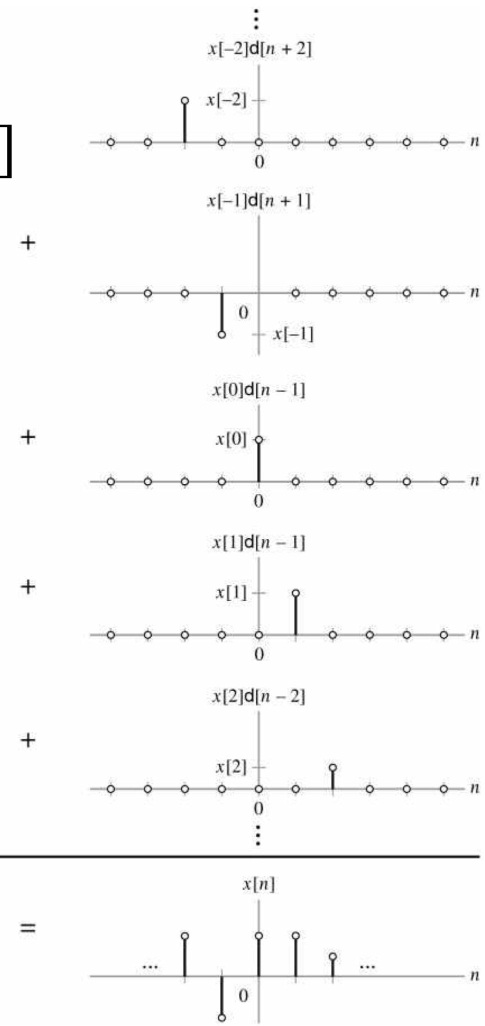


임펄스 신호를 이용한 입력신호의 표현

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n]$$
$$+ x[1]\delta[n-1]x[2]\delta[n-2] + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



입출력 관계 : 컨볼루션

❑ 임펄스 응답

$$\boxed{x[n]=\delta[n]} \quad \boxed{\Rightarrow} \quad y[n]=h[n]=H(\delta[n])$$

❑ 시불변 시스템의 임펄스 응답특성

$$\boxed{x[n]=\delta[n-k]} \quad \boxed{\Rightarrow} \quad y[n]=h[n-k]=H(\delta[n-k])$$

❑ 선형 시불변 시스템의 출력

$$\boxed{x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]} \quad \boxed{\Rightarrow} \quad \boxed{y[n]=H(x[n])=H(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k])}$$

입출력 관계 : 컨볼루션

- 입력 신호

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- 출력 신호

$$y[n] = Hx[n] = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]H\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

by linearity

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

by time-invariance

입출력 관계 : 컨볼루션

- 입력 신호

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- 출력 신호 : Convolution

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[n]$: 임펄스 응답

- 컨볼루션을 하려면 임펄스 응답 $h[n]$을 알아야 하는데, 이는 실험적으로는 구할 수 없음.

선형시불변(LTI) 시스템의 시간영역 표현

콘볼루션 합 (이산 신호)

- 콘볼루션 계산 순서

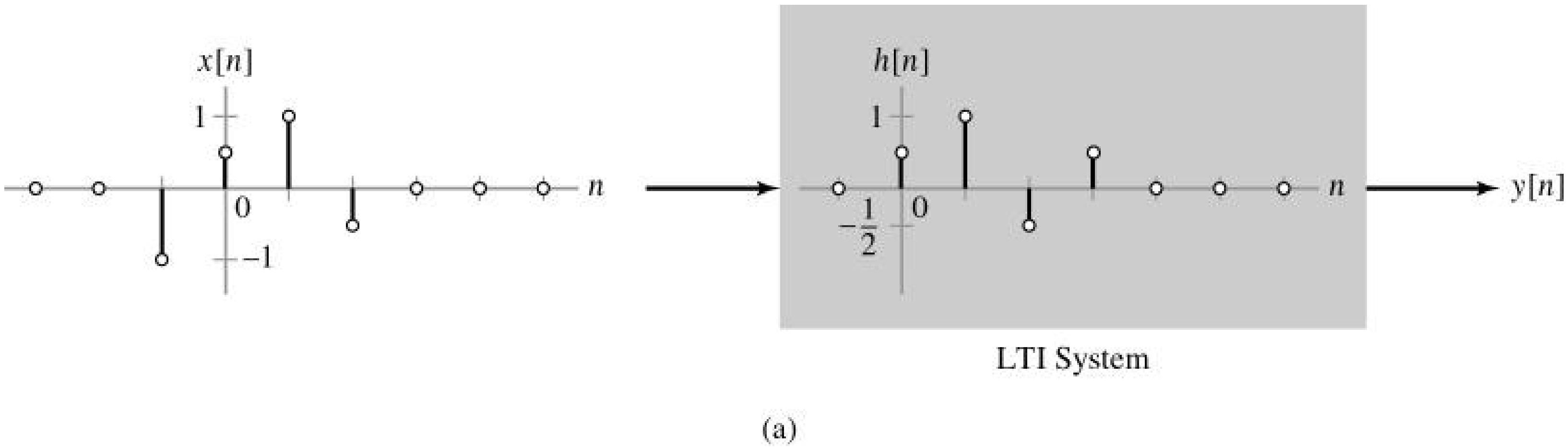


Figure 2.2a
Illustration of the convolution sum. (a) LTI system with impulse response $h[n]$ and input $x[n]$.

선형시불변(LTI) 시스템의 시간영역 표현

콘볼루션 합 (이산 신호)

❑ 콘볼루션 계산 순서