제11주 연속확률분포모형(3)

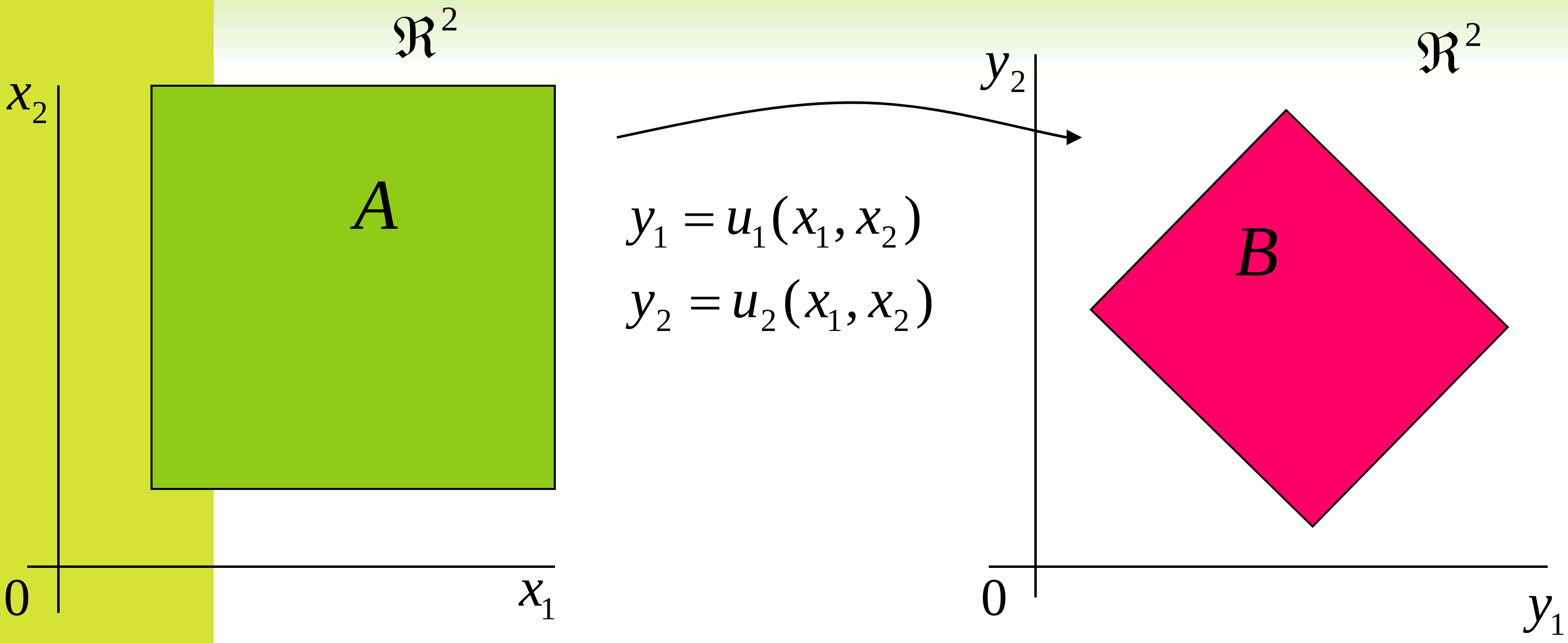
hylee@silla.ac.kr

확률및통계(2)

제 9절 연속확률변수의 합의 분포

- 쟈코비안(Jacobian)
- 변수변환된 두 확률변수의 결합확률분포
- 두 연속확률변수의 합의 분포

자코비안(JACOBIAN)



A 에서 B로의 bijective(one-to-one and onto) 함수를 생각한다.

만일 x_1 과 x_2 가 각각 y_1 과 y_2 로 표현한다면

$x_1 = w_1(y_1, y_2),\ x_2 = w_2(y_1, y_2)$ 로 쓸 수있다.

2차인 행렬식

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|$$

를 이 변환식의 쟈코비안 이라고 한다.

예제(자코비안)

$A=\{(x_1,x_2)\,|\,0<x_1<1,\,0<x_2<1\}$라 하자.

1–1 변환

$$y_1=u_1(x_1,x_2)=x_1+x_2$$

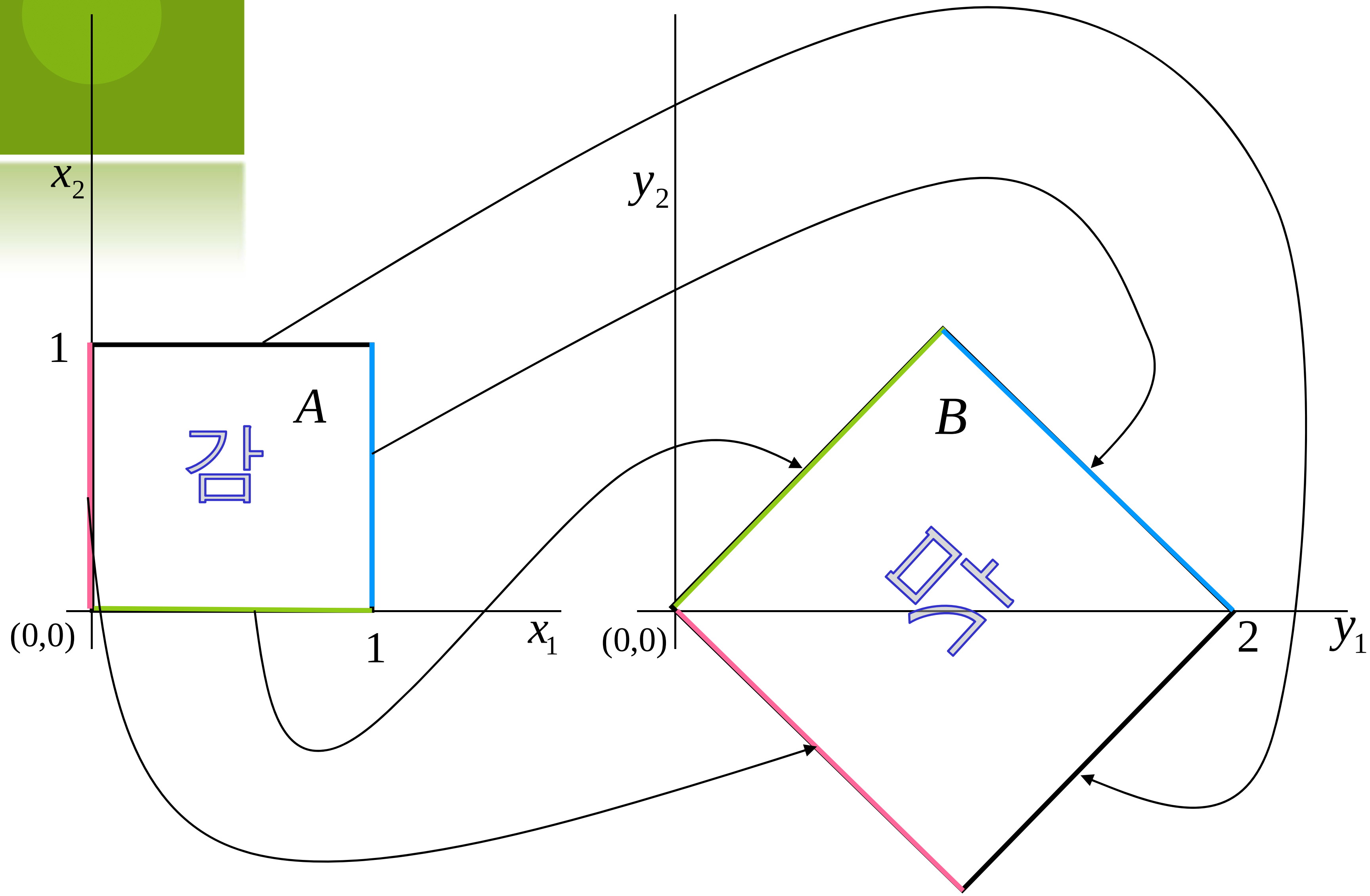
$$y_2=u_2(x_1,x_2)=x_1-x_2$$

에 의해 A는다음 그림의 영역 B로 변환된다.

여기서, 역함수는 다음과 같다.

$$x_1=w_1(y_1,y_2)=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

$$x_2=w_2(y_1,y_2)=\frac{1}{2}(y_1-y_2)$$



x_2
1
A
감
(0,0)
1
x_1
y_2
B
(0,0)
2
y_1

윗 예제의 쟈코비안은

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

이다.

두 확률변수의 두 함수의 결합 P.D.F. 구하기

(X_1, X_2) 의 결합확률밀도함수를 $f(x_1, x_2)$ 라 하자. 이때

$A = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) > 0\} \subset \Re^2$ 이고

$\begin{cases} y_1 = u_1(x_1, x_2) \\ y_2 = u_2(x_1, x_2) \end{cases}$ 가 A 에서 집합 B 위로의

1대 1의(*bijective*) 변환을 이룬다면

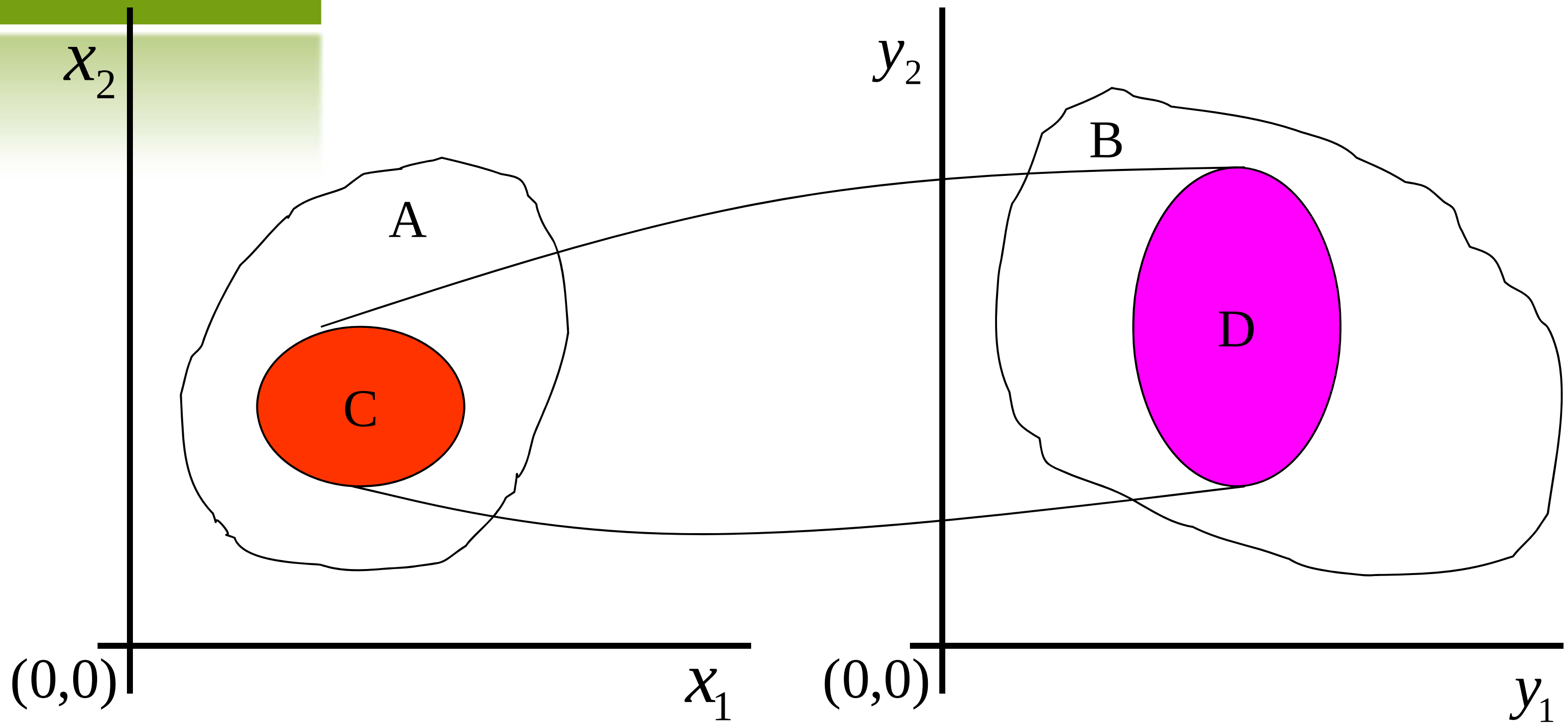
$(Y_1, Y_2) = (u_1(X_1, X_2), u_2(X_1, X_2))$ 의 결합 p.d.f. 를 구할 수 있다.

$C \subset A$ 이고 D는 1대1의 변환에 의한 A 의 사상이라 하자. 이 때,

$$P\{(Y_1, Y_2) \in D\} = P\{(X_1, X_2) \in C\}$$

$$= \iint_C f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

이다.



$$P\{(Y_1, Y_2) \in D\} = P\{(X_1, X_2) \in C\}$$

적분변수의 변환을 살펴보면

$$\iint_C f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$$

자코비안

$$= \iint_D f(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2))\,|J|\,dy_1 dy_2$$

가 성립한다.(고등미적분학) 따라서

B 의 모든 부분집합 D 에 대해서

$$P((Y_1, Y_2) \in D) = \iint_D f(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2))\,|J|\,dy_1 dy_2$$

이다.

이것은 (Y_1, Y_2) 의 결합 p.d.f. $g(y_1, y_2)$가

$$g(y_1,y_2)=\begin{cases} f(w_1(y_1,y_2),w_2(y_1,y_2))\,|J|, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (y_1,y_2)\in D \\ 0 \end{cases}$$

임을 뜻한다.

예제 19

X 와 Y가 각각 0과 1사이에서 독립인 균일분포를 따를 때, $Z = X + Y$ 의 확률 밀도함수 $h(z)$가 다음과 같음을 보이시오.

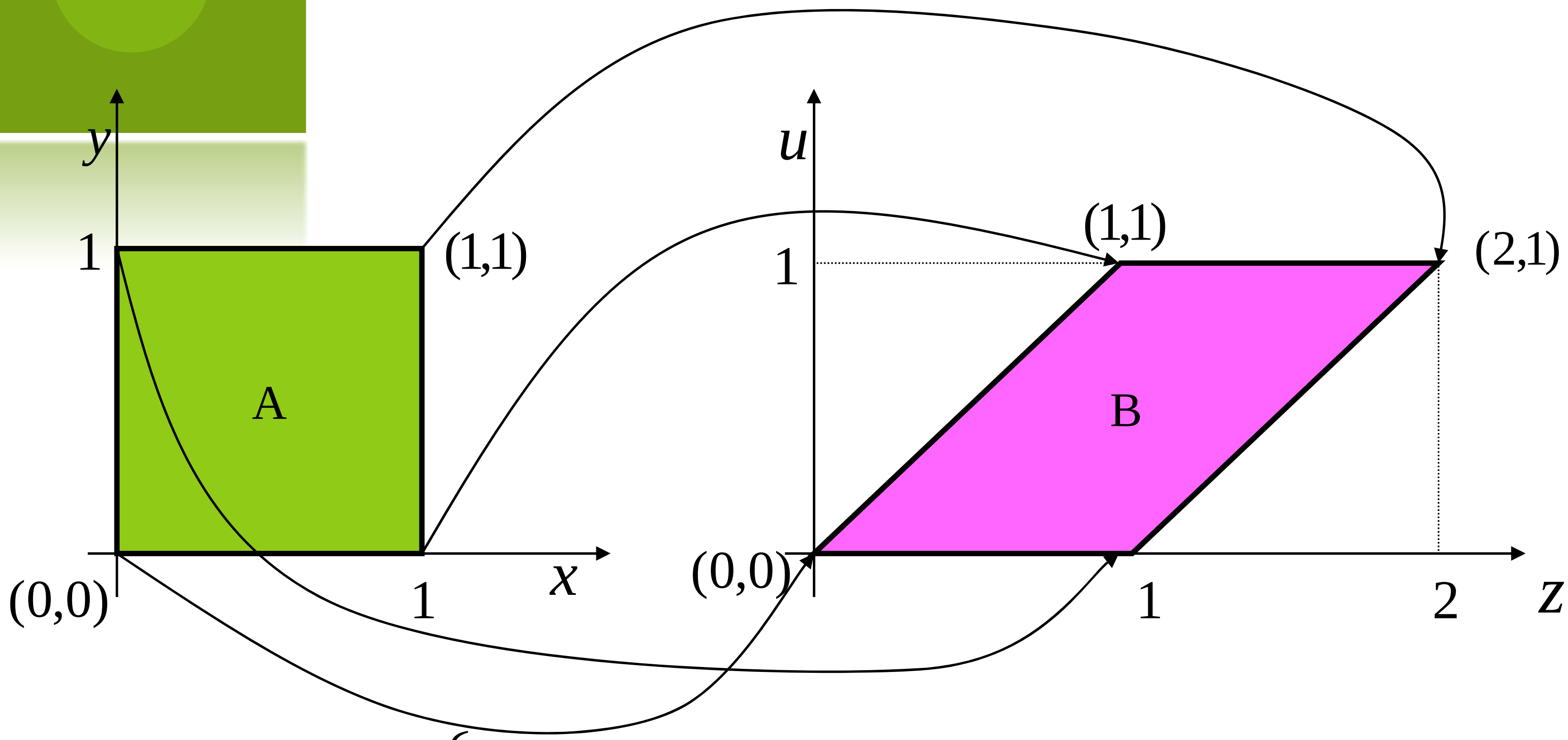
$$h(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0, z > 2) \\ z & (0 < z < 1) \\ 2 - z & (1 < z < 2) \end{cases}$$

[풀이]

이문제에서

$A=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\,0<y<1\}$ 이고

B 는 다음의 영역과 같다.



$$\begin{cases} z = w_1(x, y) = x + y \\ u = w_2(x, y) = x \end{cases}$$

역함수를 생각하면

$$\begin{cases} x = v_1(z,u) = u \\ y = v_2(z,u) = z - u \end{cases}$$

이므로 쟈코비안은 다음과 같다.

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

(X,Y)의 j.p.d.f.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "(X,Y)"] \arrow[dr] & \Re^2 \arrow[d] \\ & \Re^2 \end{tikzcd}$$

$\boxed{f_{(X,Y)}(x,y)}$

(x,y)

$$\begin{cases} z = x + y \\ u = x \end{cases}$$

(z,u)

$$Z = z(X,Y)$$

$$U = u(X,Y)$$

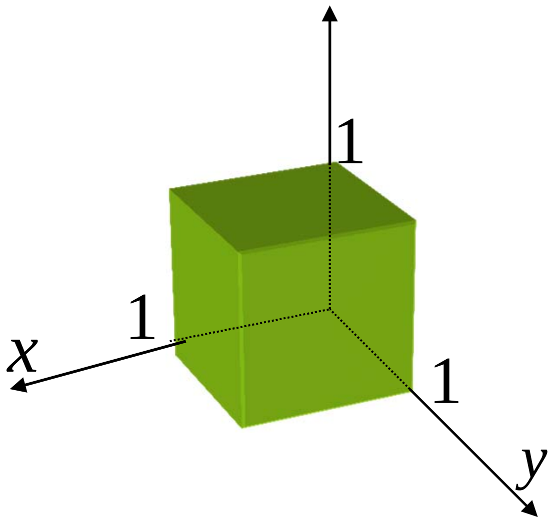
$\boxed{g_{(Z,U)}(z,u)}$

이것을 먼저 구하자

우선 X 와 Y가 독립이므로 (X,Y) 의 결합 p.d.f. $f(x,y)$ 는

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in A \\ 0, & (\text{그 밖에서})\end{cases}$$

이다.



(Z,U) 의 결합 p.d.f. $g(z,u)$ 는

$$g(z,u)=\begin{cases} f(w_1(z,u),w_2(z,u))\,|J|, & \\ \qquad (z,u)\in D & \\ 0 & \end{cases}$$

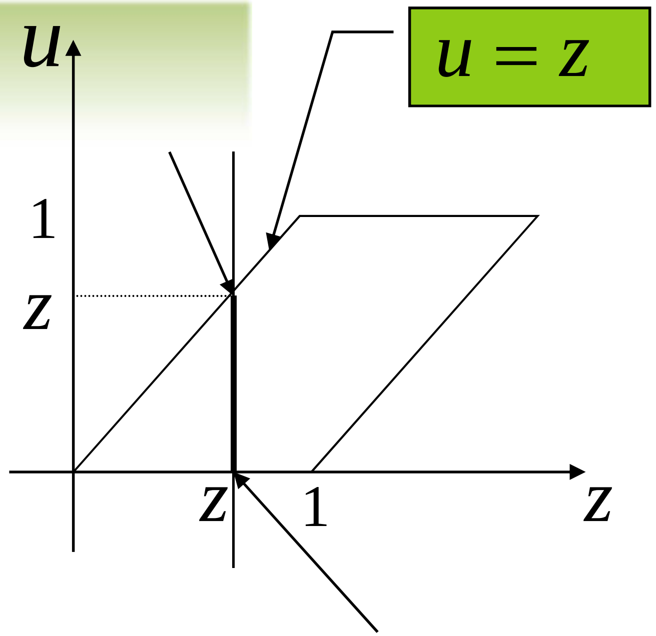
$$=\begin{cases} 1\cdot|-1|=1, & (z,u)\in D \\ 0, & (\text{그 밖에서}) \end{cases}$$

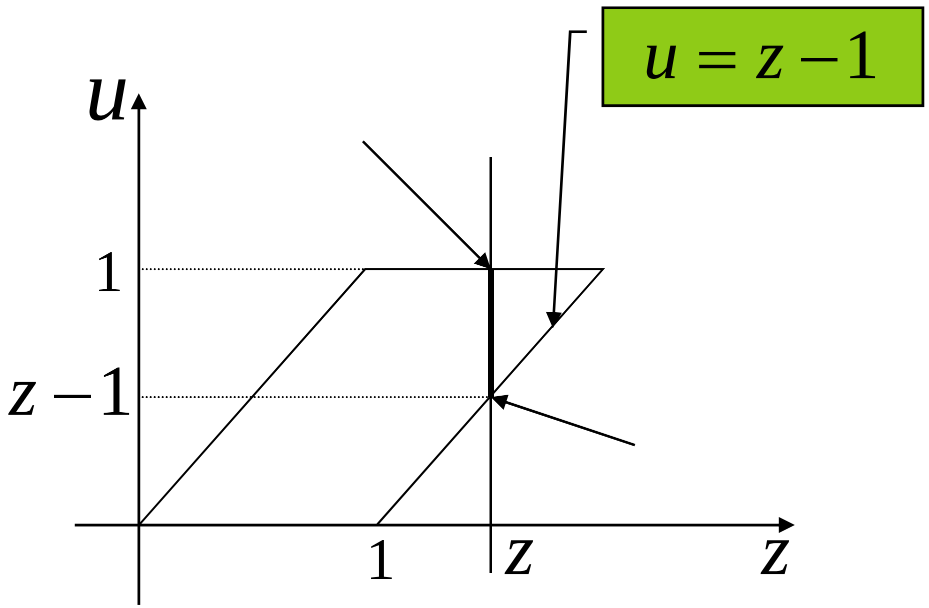
위에서 구한 (Z,U)의 결합확률밀도함수에서 Z에관한 주변확률밀도함수를 $h(z)$ 라 놓고 이를 구하면 그것이 Z의 확률밀도함수 이다.

그러므로

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)du$$

이다. 그리고 이 값은 다음과 같다.





$$h(z) = \int_0^z 1du = [u]_0^z = z$$

$$h(z) = \int_{z-1}^1 1du = [u]_{z-1}^1 = 1 - (z-1) = 2 - z$$

그러므로 Z 의 확률밀도함수는

$$h(z)=\begin{cases}0 & (z<0,\ z>2)\\ z & (0<z<1)\\ 2-z & (1<z<2)\end{cases}$$

이다.

예제 20

X 와 Y 가 서로 독립이고 모두 정규분포 $N(0,1)$ 를 따를 때, $Z = X + Y$ 의 확률 밀도함수를 구하시오.

[풀이]

X 와 Y 의 확률밀도함수를 $f(x), g(y)$ 라 하면

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

이고, $g(y)=f(y)$ 이므로 (X,Y) 의 결합 p.d.f.는

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad (-\infty < x, y < \infty)$$

이다.

그러므로 변수변환을

$$\begin{cases} z = x + y \\ u = x \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} x = u \\ y = z - u \end{cases} \right)$$

라 한다면

(Z, U) 의 결합 p.d.f.는

$$g(z,u) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,u)}\right| = f(u, z-u)\cdot|-1|$$

$$g(z,u) = f(u, z-u)$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+(z-u)^2}{2}}, \ (-\infty < z, u < \infty)$$

그러므로 Z 의 확률밀도함수 $h(z)$ 는

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+(z-u)^2}{2}} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+(z-u)^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\boxed{-\frac{u^2+z^2-2zu+u^2}{2}}} du$$

$$\left(\begin{array}{l} -\dfrac{u^2+z^2-2zu+u^2}{2} = -(u^2 - zu + \dfrac{z^2}{2}) \\ \boxed{\text{완전제곱식}} \quad \doteq -\{\dfrac{z^2}{4} + (u - \dfrac{z}{2})^2\} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(u-\frac{z}{2})^2} du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(u-\frac{z}{2})^2} du}$$

숙제

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

(왜냐하면, □이 1 이기 때문이다.)

그러므로

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\underbrace{\boxed{\sqrt{2}}}_{\sigma}}\, e^{-\frac{z^2}{2\cdot \underbrace{\boxed{2}}_{\sigma^2}}}$$

평균이 0 이고 분산이 2 인 정규분포이다.

예제 21

X 와 Y 가 서로 독립이고 모두 평균 $\frac{1}{\lambda}$ 의 지수분포를 따를 때, $X+Y$ 의 밀도함수를 구하시오.

[풀이]

X 와 Y 의 확률밀도함수는 각각

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

그러므로 $Z = X + Y$ 의 확률밀도함수는

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(z-u)du$$

$$= \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(z-u)} du$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_{0}^{z} e^{0} du = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad (z > 0)$$