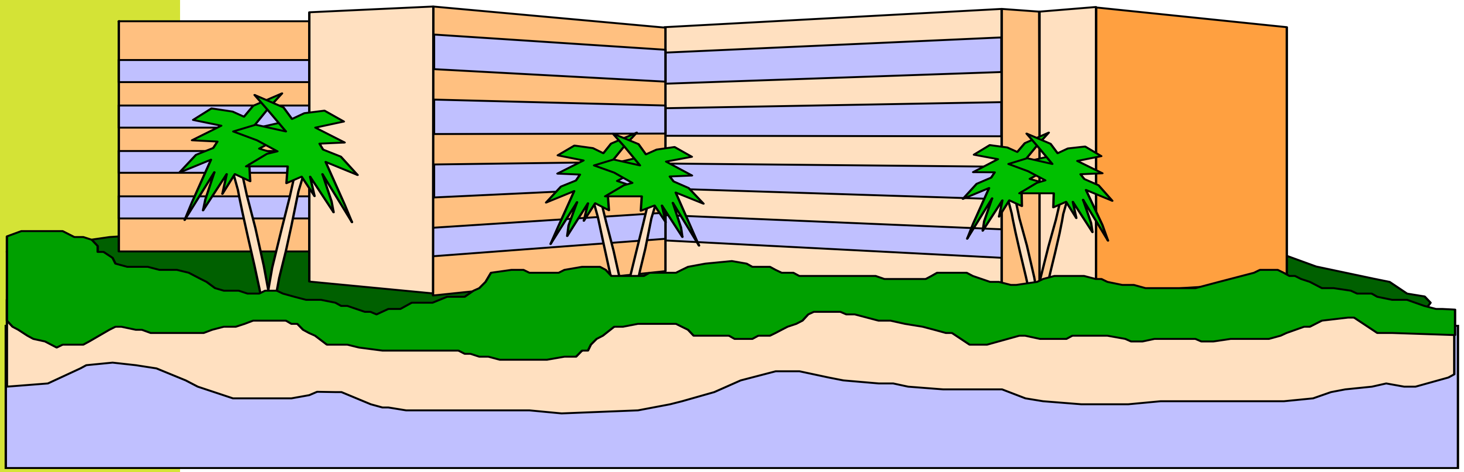
제7주 이산형 확률 분포모형 (3)

hylee@silla.ac.kr

확률및통계(2)

제 9절 이산확률변수의 합의 분포

- 이산확률변수의 합의 분포에 대해 공부하자



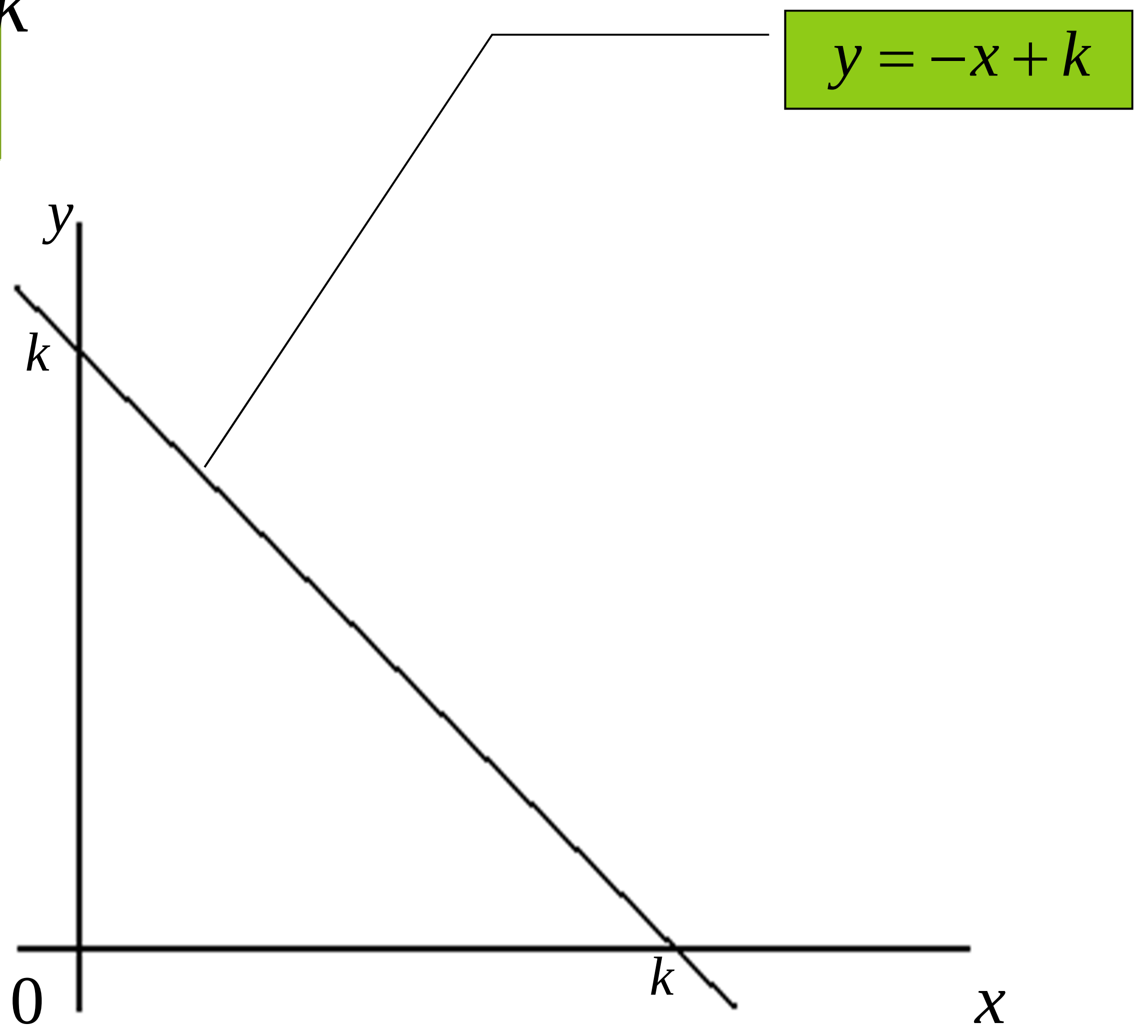
X 와 Y 가 서로 독립인 이산확률변수일 때, 합 $Z = X + Y$ 의 분포에 대해서 살펴보자

$Z = X + Y$ 가 t 가 될 확률은

$$P(X + Y = t) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P(X = t - x)P(Y = x)$$

이 된다.

$Z = k$



모든정수 k에 대해 사상 $Z = k$는 서로 배반인 $X = j$와 $Y = k - j$인사상의 합 사상이다. f 와 g를 X와 Y의 확률함수라 할때 Z의 확률함수는 다음과같다.

$$h(x) = P(Z = k)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X = j, Y = k - j)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j) g(k - j),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

예제 22 이항분포의 재생성

X, Y가 독립이고, 각각 이항분포 $B(n_1, p)$, $B(n_2, p)$를 따를때, $Z = X + Y$가 이항분포 $B(n_1 + n_2, p)$ 를 따름을 보이시오.

[풀이]

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{n_1} P(X=i,Y=-i+k)$$

$$=\sum_{i=0}^{n_1} P(X=i)P(Y=-i+k)$$

$$=\sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} p^i q^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} q^{n_2-k+i}$$

여기서, $q=1-p$ 이고, $j>r$ 일 때 $\binom{r}{j}=0$

이다.

또한,

$$\binom{n_1+n_2}{k}=\sum_{i=0}^{n_1}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}$$

이므로

$$P(X+Y=k)=p^k q^{n_1+n_2-k}\sum_{i=0}^{n_1}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}$$

$$=p^k q^{n_1+n_2-k}\binom{n_1+n_2}{k}$$

그러므로 $Z = X + Y$ 는 이항분포

$$B(n_1 + n_2, p)$$

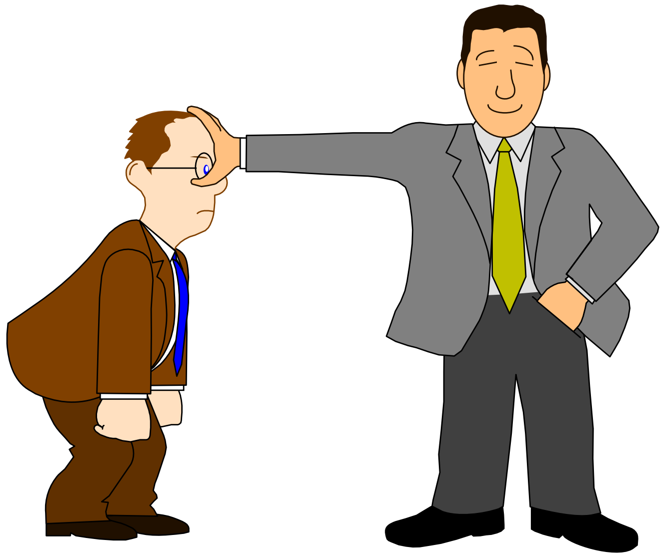
를 따른다.

***

독립인 이항분포의 합은 다시 이항분포 가된다. 이것을 이항분포의 재생성이라 한다.

예제 23 포아송분포의 재생성

X, Y 가 독립이고, 각각 포아송분포 $P(\lambda_1), P(\lambda_2)$ 를 따를 때 $X+Y$ 의 분포를 구하시오.



[풀이]

사상 $\{X+Y=n\}=\bigcup_{k=0}^{n}\{X=k, Y=n-k\}$

이므로

$$P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k, Y=n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(Y=n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

이므로, $Z = X + Y$ 는 모수가 $\lambda_1 + \lambda_2$ 인 포아송분포를 따른다. 이것을 포아송 분포의 재생성이라 한다.