02. 파동의 수학적 표현

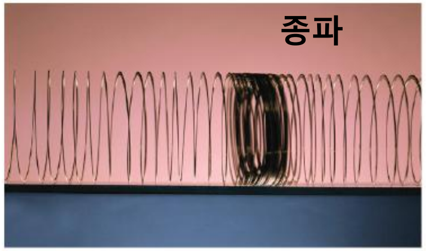
2.1 1차원 파의 운동

일상생활에서 우리는 알게 모르게 다양한 종류의 파의 운동을 경험하게 된다.

- 기다란 줄의 한쪽 끝을 잡고서 흔들 경우 그 흔들림이 줄을 따라서 이동하는 경우(일차원 파동),
- 하나의 작은 돌을 주어 호수에 던질 경우 동심원을 그리면서 퍼져 나가는 수면파(2차원 파동),
- 눈으로는 보이지 않지만 라디오로부터 흘러나오는 음악도 일종의 파동(3차원 파동)이다.

2장에서는 이러한 파의 운동을 **수학적으로 표현하는 데에 필요한 기본방법**에 대해서 다루고자 한다.

- 횡파 : 파동의 진행방향과 매질의 진동방향이 수직
  (현의 진동파, 파도타기)
- 종파 : 파동의 진행방향과 매질의 진동방향이 평행
  (음파)
- 복합파 : 횡파와 종파가 섞인 것
  (수면파)



매질에 가해준 충격이나 흔들림이 매질을 따라 운동

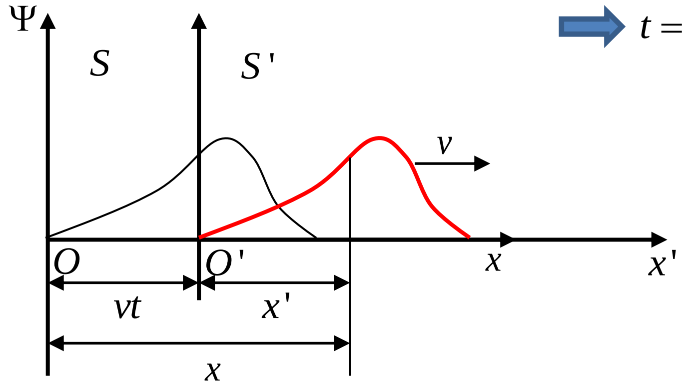
↓ **1차원 공간에서 기술**

공간에서의 위치(x)와 시간(t)의 두 좌표가 필요

↓ **수학적으로 표현**

파동함수

$$\Psi = f(x,t)$$



$t=0$인 순간에 $f(x)$ 인 펄스의 형태를 유지하고 속도 v로 x 축을 따라 진행하는 파.

$t=0$일 때 $\Psi(x,t)\big|_{t=0} = f(x,0) = f(x)$

t시간 동안 이동했을 때 $\Psi = f(x')$

파동을 따라가는 좌표계 S′와 정지 좌표계 S 사이의 좌표변환

$$x' = x - vt$$

Ψ를 정지 좌표계 S에서의 변수로 표현 $\Psi(x,t) = f(x-vt)$

정지 좌표계에서 일정 속력 v를 가지고 진행하는 파의 파동함수

$\Psi(x,t) = f(x-vt)$ 오른쪽(+ x축)으로 진행하는 파

$\Psi(x,t) = f(x+vt)$ 왼쪽(- x축)으로 진행하는 파

2.1 1차원 파의 운동

파동함수가 어떠한 형태의 미분방정식으로 표현이 가능할까?

파동방정식

$x' = x \mp vt$를 사용

$\Psi(x,t)$에서 t는 상수로 고정시키고 x에 대해 편미분 $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x'} \quad \left(\because \dfrac{\partial x'}{\partial x} = 1 \right)$ (2.1.7)

$\Psi(x,t)$에서 x는 상수로 고정시키고 t에 대해 편미분 $\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial t} = \mp v \dfrac{\partial f}{\partial x'}$ (2.1.8)

위 두 식으로부터 $\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \mp v \dfrac{\partial f}{\partial x'} = \mp v \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$ (2.1.9)

식 (2.1.7)을 x에 대해서 한번 더 편미분 $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$ (2.1.10)

식 (2.1.8)을 t에 대해서 한번 더 편미분

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mp v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \mp v \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \mp v \frac{\partial f}{\partial x'}$$

1차원에서의 파동방정식 $\boxed{\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$ (2.1.14)

일반해 $\Psi(x,t) = C_1 f(x - vt) + C_2 f(x + vt)$

예제 1

$\Psi_1(x,t) = f(x-vt)$와 $\Psi_2(x,t) = f(x+vt)$이 2차 미분방정식 식 (2.1.14)의 해라면, $\Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)$ 도 역시 2차 미분방정식의 해임을 보여라.

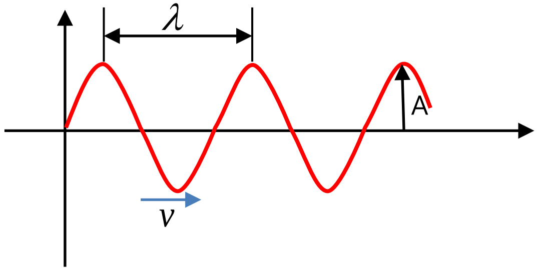
Ψ_1과 Ψ_2 가 식(2.1.14)의 해이므로, $\dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2}\right] \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\Psi_1+\Psi_2] = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\Psi_1+\Psi_2]$$

따라서, $\Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)$ 도 2차 미분방정식 식(2.1.14)의 해이다.

2.2 조화파(harmonic waves)

조화 파동의 모양 : 사인 모양(매질의 각 점이 단조화 운동)



진폭 : A　　파장 : λ

주기 : T　　속력 : $v = \dfrac{\lambda}{T}$

$$\Psi(x,0) = \Psi(x) = A\sin kx = f(x)$$

파수 : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

각진동수 : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi v}{\lambda} = kv$

조화파의 파동함수 $\Psi(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$

(+)기호 : 왼쪽으로 진행하는 파

(-)기호 : 오른쪽으로 진행하는 파

예제 2

$\Psi(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$가 파동방정식 $\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ 의 해임을 보여라.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = kA\cos(kx \pm \omega t)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx \pm \omega t) = -k^2\Psi$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \pm\omega A\cos(kx \pm \omega t)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx \pm \omega t) = -\omega^2\Psi$$

$$\therefore\ k^2\Psi = \frac{1}{v^2}\omega^2\Psi = k^2\Psi \quad (\because\ \omega = kv)$$

그러므로, $\Psi(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$는 파동방정식의 해이다.

2.3 위상과 위상속도

+x 축 방향을 따라 진행하는 조화파 $\Psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$

위상 $\phi = kx - \omega t$

의미

$x = t = 0$인 경우

$\Psi(x,t)\Big|_{\substack{x=0\\t=0}} = \Psi(0,0) = 0$ ➡ $x = t = 0$인 순간에 평형위치로부터의 변위가 0인 특수한 경우

일반적인 경우 $x = t = 0$인 순간에 평형위치로부터의 변위가 0이 아닌 경우

$$\phi = kx - \omega t + \varepsilon$$

초기 위상으로 파동이 출발할 때의 위상을 표시, **위상상수**

만일, $\varepsilon = \pi$ 이고 오른쪽으로 진행하는 파

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= A\sin(kx - \omega t + \pi) \\ &= A\sin(kx - \omega t)\cos\pi + A\cos(kx - \omega t)\sin\pi \\ &= -A\sin(kx - \omega t) = A\sin(\omega t - kx) \\ &= A\cos(\omega t - kx - \pi/2)\end{aligned}$$

임의의 주기적인 파형은
사인 또는 코사인 함수로 표현이 가능

$\phi(x,t) = kx \pm \omega t + \varepsilon$

위상에 대한 시간 변화율 $\left|\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_x\right| = \omega$

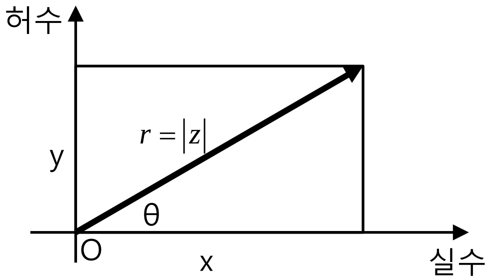
위상에 대한 공간 변화율 $\left|\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_t\right| = k$

위상속도

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\phi = \frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_x}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_t} = \pm\frac{\omega}{k} = \pm v$$

2.4 복소수 표현

복소수를 사용하면 주기적인 현상을 가지는 파의 운동을 매우 간단히 기술



$z = x + iy \quad (x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta)$ $\qquad i = \sqrt{-1}$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

오일러 공식 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

복소수 $z = x + iy$

공액 복소수 $z^* = (x+iy)^* = x - iy$

복소수 z의 크기 $|z| = (zz^*)^{1/2}$

⇨

실수부 허수부

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+z^*) = r\cos\theta\,,\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-z^*) = r\sin\theta$$

$$\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta\,,\quad \mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$$

+x 축 방향을 따라 진행하는 조화파를 기술하는 파동함수

$$\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varepsilon) \ \text{ or } \ \Psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varepsilon)$$

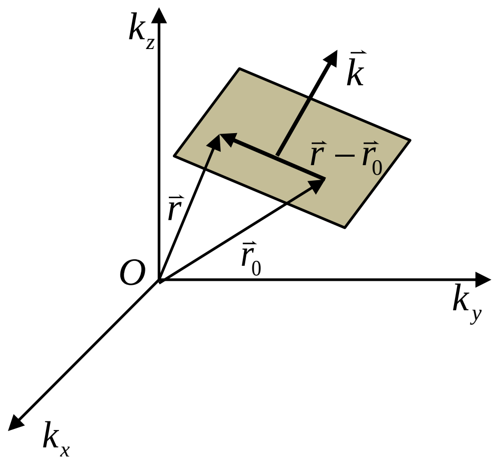
실수부를 사용하여 조화파를 기술하는 것이 일반적

$$\Psi(x,t) = \mathrm{Re}[Ae^{i(kx-\omega t+\varepsilon)}] \iff \Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t+\varepsilon)} = Ae^{i\phi}$$

2.5 평면파

평면파 : 파의 진행 방향과 수직한 평면상에서 파의 운동상태가 모두 똑같은 파
3차원 파동 중에서 가장 간단한 경우



$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}=0$$

평면 위의 임의의 벡터 $\vec{r}-\vec{r}_0$ 와 $\vec{k}$는 서로 수직

$$\vec{r}=(x,\ y,\ z)$$

$$\vec{r}_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

$$\vec{k}=(k_x,\ k_y,\ k_z)$$

$$\vec{r}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

$$k_x(x-x_0)+k_y(y-y_0)+k_x(z-z_0)=0$$

$$k_x x+k_y y+k_z z=a(=k_x x_0+k_y y_0+k_z z_0)$$

$$\vec{r}\cdot\vec{k}=\vec{r}_0\cdot\vec{k}=\text{상수}$$

임의의 시간 t에서 공간상에서 정현적으로 변하는 파동

$$\Psi(\vec{r})=A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\ ,\quad \Psi(\vec{r})=A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})\ \text{or}\ \ \Psi(\vec{r})=Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$\Psi(r)$은 $\vec{r}\cdot\vec{k}=\text{상수}$ 로 정의된 평면상에서 일정

조화함수는 $\vec{k}$의 방향으로 한 파장(λ) 만큼씩 이동함에 따라서 $\Psi(r)$은 같은 값을 가지게 됨.

공간상에서 주기성을 가지는 조화함수는

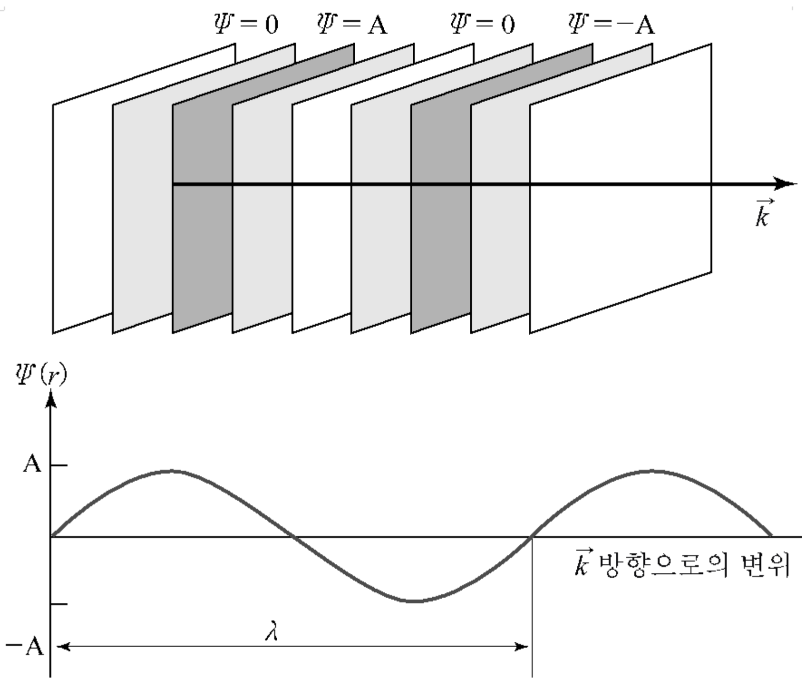
$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \lambda\vec{k}/k)$$

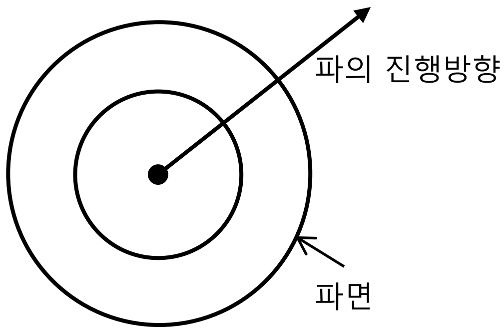
$$\Psi(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = Ae^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}+\lambda\vec{k}/k)} = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\cdot e^{i\lambda k}$$

위 식이 성립하려면, $e^{i\lambda k} = 1 = e^{i2\pi}$

파의 운동은 위치와 시간의 함수로 주어지므로, $\Psi(r)$**에 시간 의존성을 부여하면,**

$$\Psi(\vec{r},\ t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm\omega t)}$$





파면 : 임의의 특정 시간에 위상이 같은 모든 점을 연결함으로서 만들어지는 면

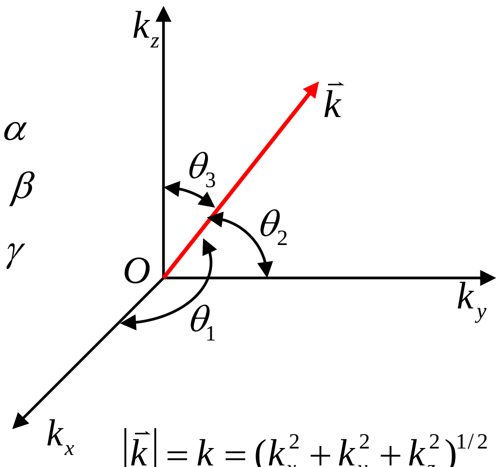
2.6 3차원에서의 파동방정식

3차원 파동 중 평면파만이 공간을 진행하면서 그 형태가 변하지 않으며,
직각좌표계에서의 평면 조화파는

$$\Psi(x,\ y,\ z,\ t) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z \pm \omega t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Psi(x,\ y,\ z,\ t) = Ae^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z) \pm i\omega t}$$

$$\cos\theta_1 = k_x / k = \alpha$$
$$\cos\theta_2 = k_y / k = \beta$$
$$\cos\theta_3 = k_z / k = \gamma$$



$$\left|\vec{k}\right| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

파동방정식은 위의 해를 이용하여 구함.

위치좌표에 대해 2차 미분

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\alpha^2 k^2 \Psi\ , \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\beta^2 k^2 \Psi\ , \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\gamma^2 k^2 \Psi$$

시간에 대해 2차 미분

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -k^2 \Psi = -\frac{\omega^2}{v^2}\Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

파동 방정식

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

(∇^2 : 라플라시안 연산자)

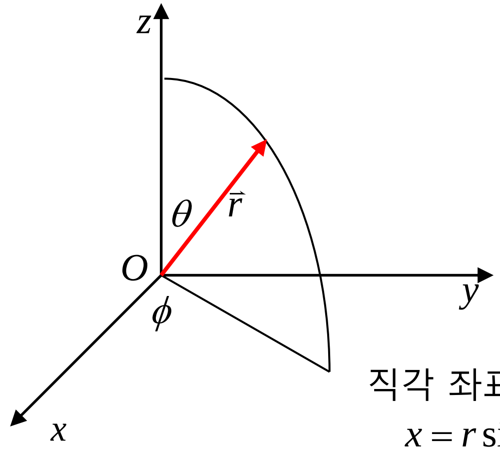
방정식의 일반해

$$\Psi(r,t) = C_1 f\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{k}}{k} - vt\right) + C_2 g\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{k}}{k} + vt\right)$$

C_1, C_2는 상수
첫째 항 : 파원에서 멀어지는 쪽으로 진행하는 파
둘째 항 : 반대로 움직이는 파
진폭이 시간이나 거리에 따라서 변하지 않음.

반경이 일정한 공 모양의 물체가 팽창과 수축을 일정한 속도로 계속하면,
물체를 중심으로 모든 방향으로 퍼져나가는 **구면파를 형성**

⇨ 구극 좌표계 사용



구극 좌표계의 라플라시안 연산자

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

구면파는 구 대칭이므로 $\Psi(\vec{r}) = \Psi(r,\ \theta,\ \phi) = \Psi(r)$

⇨ $$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)$$

직각 좌표 ⇔ 구극 좌표

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

파동 방정식

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Psi)$$

$$\nabla^2\Psi(r) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi)\right)\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Psi + r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\\ &= \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\end{aligned}$$

방정식의 일반해

$$\Psi(r,t) = C_1\frac{f(r-vt)}{r} + C_2\frac{g(r+vt)}{r}$$ (구면 조화파)

$$\Psi(r,t) = \left(\frac{A}{r}\right)\cos(kr \pm \omega t) \ \text{ or } \ \Psi(r,t) = \left(\frac{A}{r}\right)e^{i(kr\pm\omega t)}$$

진폭이 r의 함수이므로 파원으로부터 멀어짐에 따라 감소.
원점에서 충분히 떨어진 곳에서 파면의 미소면적은 평면파와 거의 비슷

2.8 원통모양의 파(Cylindrical wave)

무한히 길고 반경이 일정한 원통형의 물체가 물체의 중심축에 대하여 팽창과 수축을 일정한 속도로 지속하는 경우에 주 위 매질에 **원통모양의 파를 형성**

➡ 원통 좌표계 사용

원통 좌표계의 라플라시안 연산자 $\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$

직각 좌표 ⇔ 원통 좌표

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

원통 대칭인 경우 $\Psi(\vec{r}) = \Psi(r,\ \theta,\ z) = \Psi(r)$

파동 방정식 $\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

r이 큰 경우 방정식의 해

$$\Psi(r,t) \cong \left(\frac{A}{\sqrt{r}}\right)\cos(kr \pm \omega t) \text{ or } \Psi(r,t) \cong \left(\frac{A}{\sqrt{r}}\right)e^{i(kr\pm\omega t)}$$

원통 대칭을 가진 파의 진폭은
차원으로부터 거리(r)에 대한 제곱근의 역수로 비례.