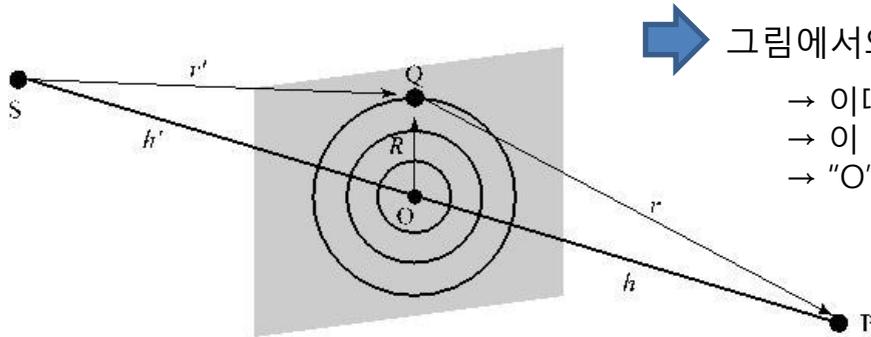


11.3 프레넬 회절

광원이나 관측면이 조리개에 가까이 있어서 파면의 곡률을 무시할 수 없는 경우에 일어나는 회절이 **프레넬 회절**이다. 이러한 회절에서는 평면파를 이용하여 설명할 수 없고 수학적으로는 프라운호퍼 회절보다도 복잡하지만 실험적으로는 오히려 간단하다. 이 절에서는 비교적 쉬운 수학을 사용해서 설명이 가능한 간단한 경우의 프레넬 회절에 대해서 취급하고자 한다.

프레넬 구역



- 그림에서와 같이 점광원(S)에 의해 조명된 평면 조리개를 생각해보자.
- 이때 광원(S)과 관측점(P)을 연결하는 직선이 평면 조리개와 수직
 - 이 직선이 평면 조리개와 만나는 점을 "O",
 - "O"로부터 조리개 안쪽 임의의 점(Q)까지의 거리를 "r"이라 하자.

$PQS = r + r'$ 는 다음과 같이 "R"로 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned}
 r + r' &= (R^2 + h^2)^{1/2} + (R^2 + h'^2)^{1/2} \\
 &= h + h' + \frac{1}{2}R^2 \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right) + \dots \quad (11.3.1)
 \end{aligned}$$

조리개가 동심원($R=$ 일정)들로 구분되어지는 영역으로 분리된다고 가정
 동심원들 사이에 $(r+r')_0 = h+h'$

$$(r+r')_1 = h+h' + \frac{1}{2}R_1^2 \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right) \quad (11.3.2)$$

$$(r+r')_1 - (r+r')_0 = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}R_1^2 \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right) \text{의 관계가 만족.}$$

$r+r'$ 들 사이의 차이가 사용한 빛의 파장의 절반, 즉 $\lambda/2$ 가 되도록 하는 반경 R로 구분되어진다고 할 때, 각각의 영역을 **프레넬 구역**이라 하며 식 (11.3.2)의 왼쪽 항에서의 아래 첨자들은 동심원 중심으로부터 프레넬 구역을 만족하는 원들의 차수를 말한다.

11.3 프레넬 회절

$$R_1 = \sqrt{\lambda L}$$

$$R_2 = \sqrt{2\lambda L}$$

$$\vdots$$

$$R_n = \sqrt{n\lambda L}$$

$L = \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right]^{-1}$ 와 같이 정의하면, 각각의 프레넬 구역에 대한 반경은 식 (11.3.2)으로부터

R_n 과 R_{n+1} 은 각각 n 번째 프레넬 구역의 안쪽 반경과 바깥쪽 반경이라고 할 때에, n 번째 프레넬 구역의 면적은

$$\pi R_{n+1}^2 - \pi R_n^2 = \pi \lambda L = \pi R_1^2 \quad (11.3.5)$$

첫 번째 구역의 면적과 같다. 즉 각 프레넬 구역의 면적은 동일하며, 가장 낮은 차수의 경우라 하더라도 프레넬 구역 반경은 실제로 매우 작다.



$h=h'=50$ cm이고, $\lambda=600$ nm인 경우에 $R_1=(\lambda L)^{1/2}=0.4$ mm이 된다. 프레넬 구역의 반경은 \sqrt{n} 에 비례하므로, 100번째의 프레넬 구역 반경은 $R_{100}=(100\lambda L)^{1/2}=4.0$ mm 가 된다.

점 P에서의 광학적 진폭은 각 프레넬 구역에 의한 광학적 진폭을 합친 것과 같고, 각 구역 사이의 평균 위상차는 180° (거리차가 $\lambda/2$)이므로

$$|U_p| = |U_1| - |U_2| + |U_3| - |U_4| + \dots \quad (11.3.6)$$



"O"에 중심을 둔 원형 조리개의 경우를 고려해보자.

조리개가 정확히 n 개의 완전한 프레넬 구역들로 이뤄져 있다고 할 때에, 각 프레넬 구역의 면적은 동일하므로, 각 프레넬 구역에 대한 광학적 진폭의 값 $|U|$ 는 거의 같게 된다.

- ① 프레넬 구역의 수가 짝수일 때는 $|U| \sim 0$
- ② 프레넬 구역의 수가 홀수일 때는 $|U_p| \sim |U_1|$

11.3 프레넬 회절

프레넬 - 키르히호프 공식에서의 경사 인자와 반경 거리 인자를 고려할 경우에, $|U_n|$ 은 n 이 증가함에 따라서 서서히 감소하게 된다. $n \rightarrow \infty$ 인 경우, 즉, 조리개의 넓이가 무한히 큰 경우(즉, 조리개가 전혀 없는 경우)에 점 P에서의 총 광학적 진폭은 첫 번째 프레넬 구역만 있는 조리개에 의해 발생하는 광학적 진폭의 약 절반이 되는데, 이는 식 (11.3.6)에서의 각 항들을 아래의 식 (11.3.7)과 같이 씌우므로 알 수 있다.

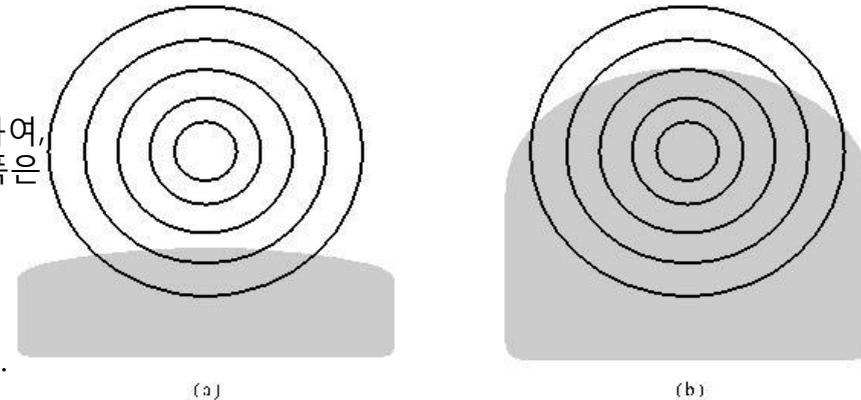
$$|U_p| = \frac{1}{2}|U_1| + \left(\frac{1}{2}|U_1| - |U_2| + \frac{1}{2}|U_3|\right) + \left(\frac{1}{2}|U_3| - |U_4| + \frac{1}{2}|U_5|\right) + \dots$$

$$\sim \frac{1}{2}|U_1| \tag{11.3.7}$$

n 의 증가에 따른 $|U_n|$ 값의 변화는 매우 작으므로, 임의의 $|U_n|$ 의 값은 인접한 두 개의 $|U|$ 의 평균값과 거의 같게 된다. 따라서 식 (11.3.7)에서의 괄호 안의 양은 거의 "영"이 되므로, P점에서의 광학적 진폭은 거의 첫 번째 프레넬 구역 값의 절반이 된다. $\frac{1}{2}|U_1|$ 은 조리개가 없을 경우에 대한 점 P에서의 광학적 진폭이다.

그림 (a)의 경우에 프레넬 구역의 바깥 부분(반지름이 큰 프레넬 구역)이 부분적으로 가려져 있다. 따라서 식 (11.3.6)에서의 차수가 높은 항(반지름이 큰 프레넬 구역들의 기여에 의한 항)들은 가리개가 없을 경우보다 빨리 감쇄하게 되지만, 차수가 낮은 항(반지름이 작은 안쪽 프레넬 구역)들은 별로 영향을 받지 않는다. 이 때문에, $|U_p|$ 의 값은 거의 변하지 않는다.

그림 (b)의 경우에 안쪽 중심의 프레넬 구역이 완전히 가려져 있는 데 반하여, 바깥쪽의 프레넬 구역은 부분적으로 가려져 있어 이들에 의한 광학적 진폭은 서로 상쇄되어 관측점은 어둡게 된다. 따라서 관측점(P)이 그림자 영역에 있다면, 점 P에서의 광학적 진폭은 매우 작게 되어 기하 광학에서의 결과와 개략적으로 일치한다. 가리개 모서리에서의 불균일 정도가 첫 번째 프레넬 구역의 반경에 비해 작을 경우에만 그림자 영역 주위에서 회절 무늬를 볼 수 있다.



11.3 프레넬 회절

프레넬 구역판

만일 짝수의 프레넬 구역은 가려지고,
홀수의 프레넬 구역만이 빛이 통과하도록 조리개가 만들어지는 경우에
P점에서의 광학적 진폭은

$$|U_p| = |U_1| + |U_3| + |U_5| + \dots$$

이러한 광학 조리개를 **프레넬 구역판**이라 하며,
관측점(P점)에서의 빛의 세기가 프레넬 구역판이 없을 때보다도 증가하게 되어 **렌즈와 같은 역할**을 한다.

프레넬 구역판의 초점거리는

$$L = \frac{R_1^2}{\lambda}$$

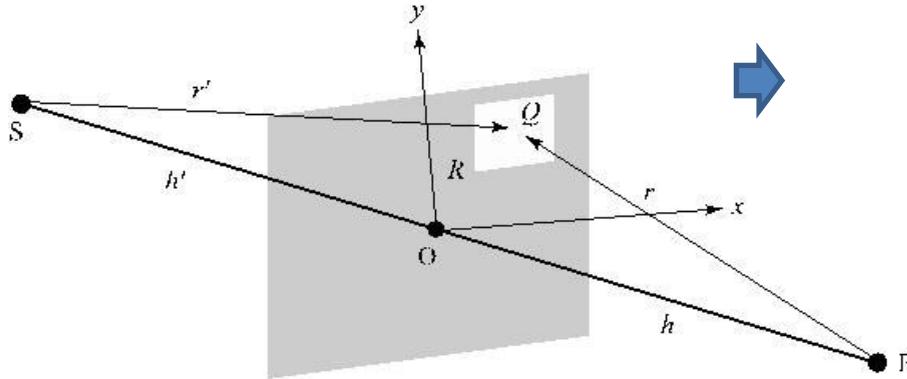
프레넬 구역판은 그림과 같은 모양의 물체를 사진으로 찍어, 필름에 현상을 함으로서 만들 수 있다.
이렇게 만들어진 프레넬 구역판은
빛을 모아서 초점을 형성함으로 원거리 물체의 상을 형성할 수 있으나
초점거리가 파장에 반비례하므로 색수차가 매우 크다는 단점이 있다.



11.3 프레넬 회절

사각형 조리개

사각형 조리개에 의한 프레넬 회절은 프레넬 - 키르히호프 공식을 사용하여 설명



$$\begin{aligned}
 PQS = r + r' &= (R^2 + h^2)^{1/2} + (R^2 + h'^2)^{1/2} \\
 &= h + h' + \frac{1}{2}R^2 \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right) + \dots \quad R^2 = x^2 + y^2 \\
 r + r' &\cong h + h' + \frac{1}{2L}(x^2 + y^2) \quad \left(L = \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right)^{-1} \right) \quad (11.3.11)
 \end{aligned}$$

관측점 P에서의 빛의 진폭을 구하기 위해서는 식 (11.3.11)으로 주어진 프레넬 - 키르히호프 적분공식

$$U_p = -\frac{ikU_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int_s \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right] dA \quad (11.3.12)$$

을 사각형 조리개의 영역에 대해서 적분

프라운호퍼 회절에서와 같이 경사 인자 $[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}')]$ 와 반경인자 $(1/rr')$ 의 변화가 지수 함수적 인자 $e^{ik(r+r')}$ 에 비하여 매우 천천히 변한다고 가정하여 적분 기호 밖에 두면, 회절식은

$$\begin{aligned}
 U_p &= -\frac{ikU_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right] \frac{1}{rr'} \int_s e^{ik(r+r')} dA \quad (11.3.13) \\
 &= -\frac{ikU_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right] \frac{1}{rr'} \int_s e^{ik(h+h'+(x^2+y^2)/2L)} dA \\
 &= -\frac{ikU_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right] \frac{1}{rr'} e^{ik(h+h')} \int_s e^{ik(x^2+y^2)/2L} dA \quad (11.3.14)
 \end{aligned}$$

11.3 프레넬 회절

$$\begin{aligned}
 U_p &= C' \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{ik(x^2+y^2)/2L} dx dy \\
 &= C' \int_{x_1}^{x_2} e^{ikx^2/2L} dx \int_{y_1}^{y_2} e^{iky^2/2L} dy \quad (11.3.15) \\
 u &= x\sqrt{\frac{k}{\pi L}} = x\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}, \quad v = y\sqrt{\frac{k}{\pi L}} = y\sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \quad \text{로 치환}
 \end{aligned}$$

$$U_p = U_1 \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2} dv \quad (U_1 = C' \pi L / k) \quad (11.3.17)$$

식 (11.3.17)의 적분은

$$\int_0^s e^{i\pi\omega^2/2} d\omega = C(s) + iS(s) \quad (11.3.18)$$

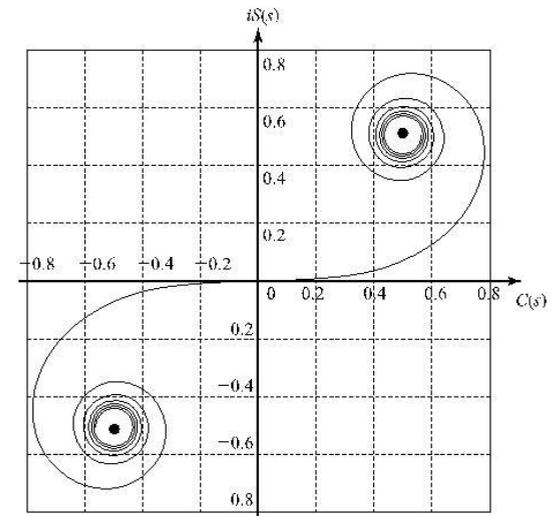
식 (11.3.17)에서의 실수와 허수부분은 각각

$$C(s) = \int_0^s \cos(\pi\omega^2/2) d\omega \quad (11.3.19)$$

$$S(s) = \int_0^s \sin(\pi\omega^2/2) d\omega \quad \rightarrow \text{프레넬 적분}$$

표에 s에 대한 C(s)와 S(s)의 수치 값을 나타내었으며, 이들의 그래프를 그림과 같이 나타내었다. s₁에서 s₂까지의 프레넬 적분, 즉, $\int_{s_1}^{s_2} e^{i\pi\omega^2/2} d\omega$ 에 대한 적분값은 코르누(cornu) 나선에서 s₁과 s₂를 연결한 직선 길이가 되며, 직선 길이의 C(s) - 축에 대한 투영 값은 프레넬 적분의 실수 부분, S(s) - 축에 대한 투영 값은 프레넬 적분의 허수 부분에 해당된다.

s	C(s)	S(s)	S	C(s)	S(s)
0.00	0.0000	0.0000	2.20	0.6363	0.4557
0.10	0.1000	0.0005	2.30	0.6266	0.5531
0.20	0.1999	0.0042	2.40	0.5550	0.6197
0.30	0.2994	0.0141	2.50	0.4574	0.6192
0.40	0.3975	0.0334	2.60	0.3890	0.5500
0.50	0.4923	0.0647	2.70	0.3925	0.4529
0.60	0.5811	0.1105	2.80	0.4675	0.3915
0.70	0.6597	0.1721	2.90	0.5624	0.4101
0.80	0.7230	0.2493	3.00	0.6058	0.4963
0.90	0.7648	0.3398	3.10	0.5616	0.5818
1.00	0.7799	0.4383	3.20	0.4664	0.5933
1.10	0.7638	0.5365	3.30	0.4058	0.5192
1.20	0.7154	0.6234	3.40	0.4385	0.4296
1.30	0.6386	0.6863	3.50	0.5326	0.4152
1.40	0.5431	0.7135	3.60	0.5880	0.4923
1.50	0.4453	0.6975	3.70	0.5420	0.5750
1.60	0.3655	0.6389	3.80	0.4481	0.5656
1.70	0.3238	0.5492	3.90	0.4223	0.4752
1.80	0.3336	0.4508	4.00	0.4984	0.4204
1.90	0.3944	0.3734	4.10	0.5738	0.4758
2.00	0.4882	0.3434	4.20	0.5418	0.5633
2.10	0.5815	0.3743	∞	0.5000	0.5000



11.3 프레넬 회절

프레넬 적분에 대한 예로서

- ① 조리개의 크기가 무한대인 경우,
- ② 긴 슬릿 모양의 조리개에 대한 경우,
- ③ 슬릿의 한쪽이 없는 반쪽 창인 경우에 대해서 생각해보자.

① 조리개의 크기가 무한대인 경우

조리개의 크기가 무한대라 함은 조리개에 의한 회절이 없는 경우를 의미하므로, $u_1 = v_1 = -\infty$, $u_2 = v_2 = \infty$ 로 두며 프레넬 적분 값을 구할 수 있다. 이 경우에

$$C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}, \quad C(-\infty) = S(-\infty) = -\frac{1}{2} \quad (11.3.20)$$

프레넬 적분 값은

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi\omega^2/2} d\omega = C(s) + iS(s) \\ = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = 1 + i \quad (11.3.21)$$

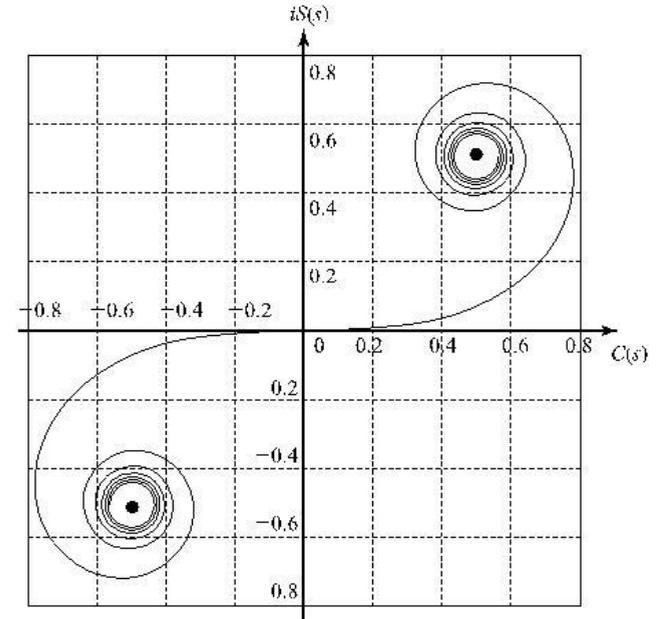
관측점(P)에서의 광학적 진폭은

$$U_p = U_1 [C(\infty) - C(-\infty) + i\{S(\infty) - S(-\infty)\}]^2 \\ = U_1 (1 + i)^2 \quad (11.3.22)$$

이는 조리개에 의한 회절이 없을 때의(즉 빛의 경로에 장애물이 없는 경우) 광학적 교란(optical disturbance)에 대한 값, 즉 U_0 가 된다. 따라서 $U_0 = U_1 (1 + i)^2$ 로 두면 일반적인 조리개의 경우에 관측점(P)에서의 **광학적 진폭에 대한 규격화된 표현식**은 식 (11.3.15)을 이용하여

$$U_p = \frac{U_0}{(1+i)^2} [C(u) + iS(u)]_{u_1}^{u_2} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2}$$

(11.3.23)



코르누 나선의 아래 눈(0.5, 0.5)에서 위 눈(0.5, 0.5)까지의 직선길이가 된다.

엄밀히 말해서 u, v의 값이 클 경우에는 식 (11.3.11)의 근사적인 표현이 옳지 않으나, U_p 에 대한 주요 기여는 낮은 차수에 있는 프레넬 구역에 의한 것이므로, 보통의 경우에 이러한 근사를 사용할 수 있다.

11.3 프레넬 회절

② 긴 슬릿 모양의 조리개에 대한 경우

이 경우에 대한 프레넬 회절은 $u_1 = -\infty$, $u_2 = \infty$ 인 직사각형 조리개에 의한 회절로 볼 수 있으므로, 관측점에서의 광학적 진폭(U_p)은

$$\begin{aligned}
 U_p &= \frac{U_0}{(1+i)^2} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2} [C(u) + iS(u)]_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{U_0}{(1+i)^2} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2} [1+i] \\
 &= \frac{U_0}{1+i} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2}
 \end{aligned} \tag{11.3.24}$$

로 주어지며, v_1, v_2 는 슬릿의 경계에 의해 결정된다.

③ 슬릿의 한쪽이 없는 반쪽 창인 경우

코르누 나선의 한 응용으로서 긴 반쪽 창을 고려하되 광원과 점 P_0 를 연결하는 직선의 윗부분을 조명영역 그리고 아랫부분을 그림자 영역으로 분류한다.

이 경우에 조리개의 원점을 반쪽창의 한쪽 끝 중앙(반쪽창이 광원과 점 P_0 를 연결하는 선과 만나는 점)에 잡으면, 식 (11.3.15) $v = y\sqrt{k/\pi L} = y\sqrt{2/\lambda L}$ 에 의하여 세로축 방향을 나타내는 v_1, v_2 는 각각 $v_1 = v_1$, $v_2 = \infty$ 이 되며, 가로 축 방향을 나타내는 u_1, u_2 는 각각 $u_1 = -\infty$, $u_2 = \infty$ 이 된다. 따라서 관측점에서의 광학적 진폭은

$$\begin{aligned}
 U_p &= \frac{U_0}{(1+i)^2} [C(u) + iS(u)]_{-\infty}^{+\infty} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{\infty} \\
 &= \frac{U_0}{(1+i)^2} (1+i) \left[\frac{1}{2} - C(v_1) + \frac{1}{2}i - iS(v_1) \right] \\
 &= \frac{U_0}{1+i} \left[\frac{1}{2} - C(v_1) + \frac{1}{2}i - iS(v_1) \right]
 \end{aligned} \tag{11.3.25}$$

11.3 프레넬 회절

그림 (a)의 경우에 스크린 위의 관측점 P_0 가 반쪽창의 끝과 광원을 연결하는 직선 위에 위치해 있으므로, $v_1 = 0$ 이 된다. 따라서 $C(v_1 = 0) = 0$, $S(v_1 = 0) = 0$ 이 되어

$$U_p = \frac{U_0}{1+i} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{1}{2} U_0 \quad (11.3.26)$$

관측점에서의 빛의 세기(I_p)는

$$I_p = |U_p|^2 = \frac{1}{4} |U_0|^2 = \frac{1}{4} I_0 \quad (11.3.27)$$

빛의 세기는 반쪽 창이 없을 때의 1/4이 됨을 알 수 있다. 이때에 스크린 위의 관측점 P_0 에서 빛의 진폭은 코르누 나선의 아래 쪽 눈으로부터 원점까지의 길이에 비례한다.

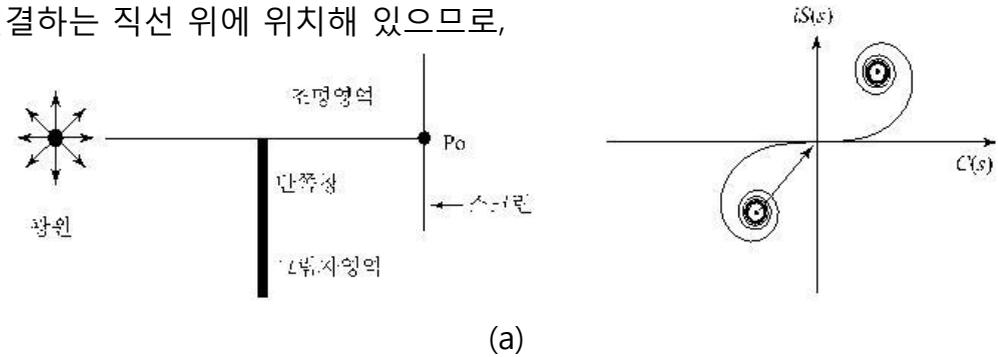


그림 (b)에서와 같이 관측점이 그림자 영역에 있는 경우에 코르누 나선의 아래쪽 눈에 있는 화살표의 원점은 고정돼 있으나 화살표의 끝은 코르누 나선을 따라 아래 쪽으로 이동하게 되어 화살표의 길이는 점점 짧아진다. 따라서 점 P에서의 빛의 진폭은 이 화살표의 길이에 비례하며, 점 P가 그림자 영역 깊숙이 내려오면 화살표의 끝이 코르누 나선의 눈에 도달하게 되어 화살표의 길이가 "0"이 되므로 그곳에서의 빛의 진폭도 역시 "0"이 되어 빛이 도달하지 않게 된다.

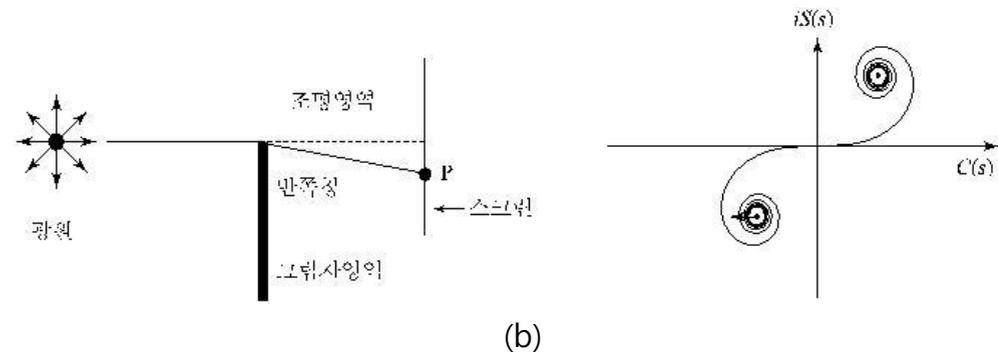
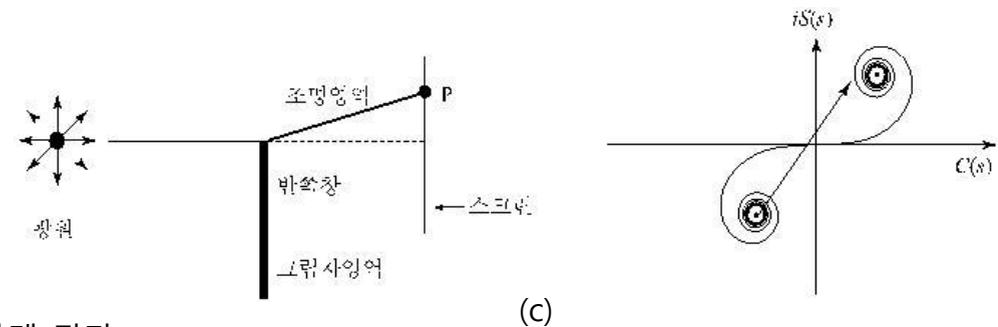
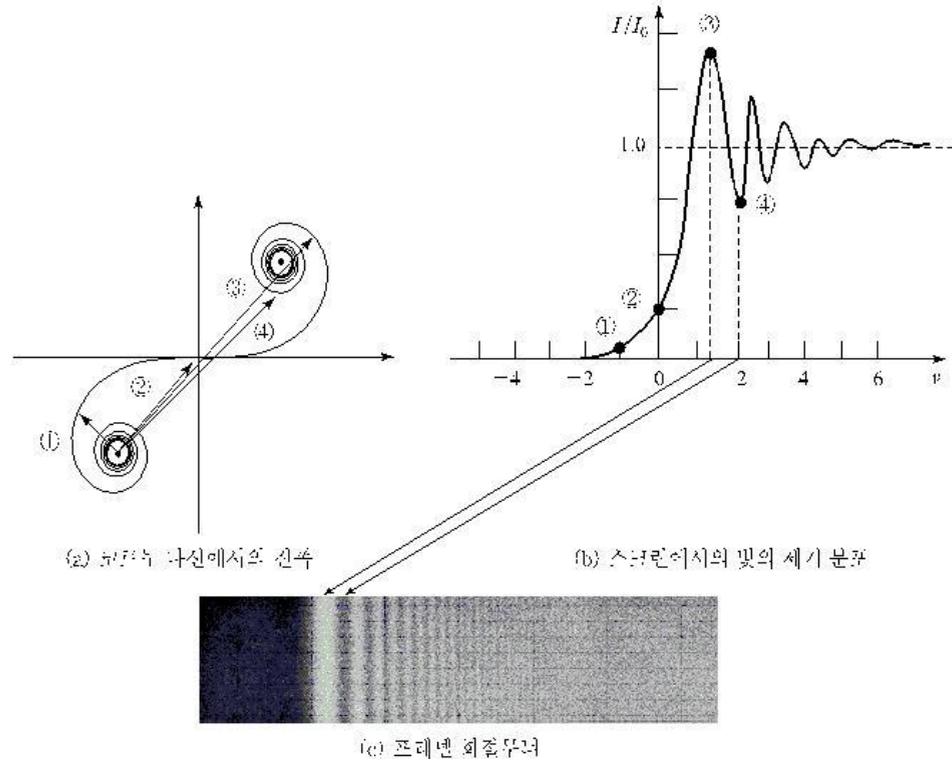


그림 (c)에서와 같이 관측점이 조명 영역에 있는 경우에 코르누 나선의 아래쪽 눈에 있는 화살표의 원점은 고정돼 있으나 화살표의 끝은 코르누 나선을 따라 위쪽으로 이동하게 된다. 따라서 화살표의 길이는 그림 (a)의 경우보다 길어지지만 코르누 나선을 따라 이동하므로 길이가 길어졌다 줄어 들었다를 반복하게 된다. 하지만 관측점이 조명영역으로 깊숙이 들어갈수록 화살표의 길이는 코르누 나선의 아래쪽 눈과 위쪽 눈을 연결하는 길이로 수렴하게 된다. 따라서 관측점 에서의 회절된 빛의 세기는 커졌다 줄었다가를 반복하다가 회절 효과가 전혀 없는 값으로 수렴하게 된다.



11.3 프레넬 회절

회절무늬의 세기, 즉, $I_p = |U_p|^2$ 을 v_1 의 함수로 나타내면 그림과 같으며, 반쪽창의 회절 효과를 반쪽창의 경계로부터 수직 거리에 따른 빛의 세기로 나타낸 것이다.



앞의 그림 (a)는 $v_1=0$ 에 해당되며, P_0 에서의 빛의 세기는 반쪽창이 없었을 때보다 1/4로 줄어들게 된다. 또한 앞 그림 (b)에서 관측점은 그림자 영역에 있게 되고 관측점에서의 빛의 세기는 그림에서와 같이 급격히 감쇄를 한다. 하지만 앞 그림 (c)에서는 양(+)의 값을 가지게 되며, $v_1 \approx 1.25$ 이 되는 관측점에서 빛의 세기는 최대가 되어 반쪽창이 없었을 때보다도 약 1.37배 더 세다. $v_1 \approx 1.25$ 인 곳을 지난 관측점에서의 빛의 세기는 진동을 하게 되다가 어느 정도 이상이 되면, 반쪽 창이 없을 때의 값(I_0)으로 수렴하게 된다.

11.3 프레넬 회절

예제 1

코르누 나선의 한 예로서 반쪽창의 경우에 (a) $v=-1.0$ (b) $v=+1.0$ 인 곳에서의 빛의 상대적 세기는 어떻게 되겠는가?

표로부터 $v=1.0$ 일 때에, $C(v)=0.7799$, $S(v)=0.4383$ 이다.

(a) 그림자 영역에서, 코르누 나선 위에 있는 화살표는 코르누 나선의 아래쪽 눈(제 3사분면)에 있으며 $C(v)=-0.5$, $S(v)=-0.5$ 에서 시작하여 $C(v=-1.0)=-0.7799$, $S(v=-1.0)=-0.4383$ 에서 끝나게 된다.

따라서 화살표의 각 성분은

$$\Delta C = |0.5 - 0.7799| = 0.2799, \Delta S = |0.5 - 0.4383| = 0.0617$$

따라서 $v=-1.0$ 인 곳에서의 빛의 상대적 세기는

$$I = \frac{I_0}{2} (0.2799^2 + 0.0617^2) = 0.041I_0$$

이 되어 회절이 일어나지 않았을 때의 빛의 세기의 약 4.1%가 된다.

(b) 그림자 영역이 아닌 조명 영역($v=+1.0$)에서의 화살표의 길이는

$$\Delta C = 0.5 + 0.7799 = 1.2799, \Delta S = 0.5 + 0.4383 = 0.9383$$

이 된다. 따라서 빛의 상대 세기는 $I = \frac{I_0}{2} (1.2799^2 + 0.9383^2) = 1.26I_0$

이 된다. 그러므로 $v=+1.0$ 인 곳에서의 세기는 반쪽 창이 없었을 때보다도 약 26% 정도 더 강하게 나타난다.