

7장 분리공리

김준희

자료출처

- 위상수학 제2판/박대희 안승호 지음/경문사/2011.
- 위상수학을 활용한 수학교육/이동명 조명현 김준희
공저/출판기획 선진/2011.

7.1 하우스도르프 공간

정의 7.1.1

위상공간 (X, \mathcal{T}) 가 서로 다른 두 원소 $a, b \in X$ 에 대하여 다음 중 오직 하나만을 만족하는 열린집합 U 가 존재할 때 이 위상공간 (X, \mathcal{T}) 를 T_0 -공간(T_0 -space)이라 한다:

$$(a) a \in U, b \notin U$$

$$(b) b \in U, a \notin U$$

7.1 하우스도르프 공간

정의 7.1.2

위상공간 (X, \mathcal{T}) 가 서로 다른 두 원소 $a, b \in X$ 에 대하여 다음을 만족하는 열린집합 U, V 가 존재할 때 이 위상공간 (X, \mathcal{T}) 를 T_1 -공간(T_1 -space)이라 한다:

$$a \in U, b \notin V \quad \text{그리고} \quad a \notin U, b \in V.$$

7.1 하우스도르프 공간

정의 7.1.3

위상공간 (X, \mathcal{T}) 가 서로 다른 두 원소 $a, b \in X$ 에 대하여 다음을 만족하는 열린집합 U, V 가 존재할 때 이 위상공간 (X, \mathcal{T}) 를 T_2 -공간(T_2 -space) 또는 하우스도르프 공간(Hausdorff space)이라 한다:

$$a \in U, b \in V \quad \text{그리고} \quad U \cap V = \emptyset.$$

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.4

- ① 모든 하우스도르프 공간은 T_1 -공간이다.
- ② 모든 T_1 -공간은 T_0 -공간이다.

7.1 하우스도르프 공간

보기 7.1.5

두 점 이상을 가지고 있는 임의의 집합 X 상의 위상 $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ 에 대하여 위상공간 (X, \mathcal{T}) 는 T_0 -공간이 아니다.

보기 7.1.6

$X = \{a, b, c\}$ 상의 위상 $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$ 에 대하여 위상공간 (X, \mathcal{T}) 는 T_0 -공간이지만 T_1 -공간은 아니다.

7.1 하우스도르프 공간

보기 7.1.7

모든 이산공간은 하우스도르프 공간이다.

보기 7.1.8

모든 자연수들의 집합 \mathbb{N} 위의 위상

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \} \cup \{\{1, 2, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

에 대하여 $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ 는 T_0 -공간이지만 T_1 -공간은 아니다.

7.1 하우스도르프 공간

보기 7.1.9

유클리드 공간 \mathbb{R} 은 하우스도르프 공간이지만 여유한 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 는 하우스도르프 공간이 아니다. 따라서 \mathbb{R} 과 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 는 위상동형이 아니다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.10

- ① T_0 -공간의 모든 부분공간은 T_0 -공간이다.
- ② T_1 -공간의 모든 부분공간은 T_1 -공간이다.
- ③ 하우스도르프 공간의 모든 부분공간은 하우스도르프 공간이다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.11

위상공간 $X_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ 에 대하여 다음이 성립한다:

- ① 각각의 X_α 가 T_0 -공간이면 곱공간 $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ 도 T_0 -공간이다.
- ② 각각의 X_α 가 T_1 -공간이면 곱공간 $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ 도 T_1 -공간이다.
- ③ 각각의 X_α 가 하우스도르프 공간이면 곱공간 $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ 도 하우스도르프 공간이다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.12

위상공간 X 에 대하여 다음은 동치이다:

- ① X 는 T_0 -공간이다.
- ② 임의의 서로 다른 두 점 $a, b \in X$ 에 대하여 $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$ 이다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.13

위상공간 X 에 대하여 다음은 동치이다:

- ① X 는 T_1 -공간이다.
- ② 임의의 점 $a \in X$ 에 대하여 $\{a\}$ 는 닫힌집합이다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.14

위상공간 X 에 대하여 다음은 동치이다:

- 1 X 는 하우스도르프 공간이다.
- 2 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ 는 곱공간 $X \times X$ 의 닫힌집합이다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.15

위상공간 X 와 하우스도르프 공간 Y 에 대하여 두 함수 $f, g : X \rightarrow Y$ 가 연속이면 다음이 성립한다:

- ① $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ 는 X 의 닫힌집합이다.
- ② X 의 조밀만 부분집합 A 에 대하여 $f|_A = g|_A$ 이면 $f = g$ 이다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.16

하우스도르프 공간상의 수열이 수렴한다면 그 극한은 유일하다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.17

위상동형인 두 위상공간 X, Y 에 대하여 다음이 성립한다:

- ① X 가 T_0 일 필요충분조건은 Y 가 T_0 이다.
- ② X 가 T_1 일 필요충분조건은 Y 가 T_1 이다.
- ③ X 가 T_2 일 필요충분조건은 Y 가 T_2 이다.

7.2 정칙공간과 정규공간

정의 7.2.1

T_1 인 위상공간 (X, \mathcal{T}) 의 임의의 닫힌집합 A 와 임의의 $x \in X - A$ 에 대하여 다음을 만족하는 열린집합 U, V 가 존재할 때 이 위상공간 (X, \mathcal{T}) 을 **정칙 공간**(regular space) 또는 **T_3 -공간**(T_3 -space)이라 한다:

$$x \in U, A \subset V \quad \text{그리고} \quad U \cap V = \emptyset.$$

7.2 정칙공간과 정규공간

정의 7.2.2

T_1 인 위상공간 (X, \mathcal{T}) 의 임의의 서로소인 닫힌집합 A, B 에 대하여 다음을 만족하는 열린집합 U, V 가 존재할 때 이 위상공간 (X, \mathcal{T}) 을 **정규 공간**(normal space) 또는 **T_4 -공간**(T_4 -space)이라 한다:

$$A \subset U, B \subset V \quad \text{그리고} \quad U \cap V = \emptyset.$$

7.2 정칙공간과 정규공간

정리 7.2.3

- ① 모든 정칙공간은 하우스도르프 공간이다.
- ② 모든 정규공간은 정칙공간이다.

7.2 정칙공간과 정규공간

보기 7.2.4

집합 \mathbb{R} 과 $K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ 에 대하여 다음을 기저로 갖는 \mathbb{R} 상의 위상 \mathcal{T}_K 를 생각하자:

$$\mathcal{B}_K = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) - K \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

이 위상을 **K-위상**이라 한다. 그러면 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ 는 하우스도르프 공간이지만 정칙 공간이 아니다.

7.2 정칙공간과 정규공간

정리 7.2.5

T_1 인 위상공간 X 에 대하여 다음은 동치이다:

- ① X 는 정칙 공간이다.
- ② 임의의 점 $x \in X$ 와 열린근방 U 에 대하여

$$x \in V \subset \bar{V} \subset U$$

을 만족하는 열린집합 V 가 존재한다.

7.2 정칙공간과 정규공간

정리 7.2.6

T_1 인 위상공간 X 에 대하여 다음은 동치이다:

- ① X 는 정규 공간이다.
- ② 임의의 닫힌집합 $A \subset X$ 와 A 를 포함하는 열린집합 U 에 대하여

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U$$

을 만족하는 열린집합 V 가 존재한다.

7.2 정칙공간과 정규공간

정리 7.2.7

위상동형인 두 위상공간 X, Y 에 대하여 다음이 성립한다:

- ① X 가 T_3 일 필요충분조건은 Y 가 T_3 이다.
- ② X 가 T_4 일 필요충분조건은 Y 가 T_4 이다.

7.2 정칙공간과 정규공간

정리 7.2.8

- ① 정칙 공간의 모든 부분공간은 정칙이다.
- ② 정규 공간들의 곱공간은 정칙이다.

7.2 정칙공간과 정규공간

보기 7.2.9

- ① 하극한 위상공간 \mathbb{R}_l 은 정규공간이다.
- ② 하극한 위상공간 \mathbb{R}_l 의 곱공간 \mathbb{R}_l^2 은 정규공간이 아니지만 정칙공간이다.

7.2 정칙공간과 정규공간

정리 7.2.10

정규 공간의 닫힌 부분공간은 정규이다.

정리 7.2.11

모든 거리공간은 정규이다.