3장 관계와 함수(Relations and Functions)

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이홍천 옮김/경문사

정의 5

집합 $X(X \neq \phi)$의 임의의 부분집합 AB, B, C에 관하여 다음이 성립할 때, 집합 $\mathcal{P}$를 X의 분할(partition)이라고 한다.

(a) $A, B \in \mathcal{P}$에 대하여, $A \neq B$ 이면 $A \cap B = \phi$

(b) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = X$

- X의 분할 : 집합 X를 서로소인 부분집합들로 나누어 놓은 것

3.3 분할과 동치관계

정의 5

집합 $X(X \neq \phi)$의 임의의 부분집합 AB, B, C에 관하여 다음이 성립할 때, 집합 $\mathcal{P}$를 X의 **분할(partition)**이라고 한다.

(a) $A, B \in \mathcal{P}$에 대하여, $A \neq B$ 이면 $A \cap B = \phi$

(b) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = X$

- X의 분할 : 집합 X를 서로소인 부분집합들로 나누어 놓은 것

3.3 분할과 동치관계

정의 5

집합 $X(X \neq \phi)$의 임의의 부분집합 AB, B, C에 관하여 다음이 성립할 때, 집합 $\mathcal{P}$를 X의 분할(partition)이라고 한다.

(a) $A, B \in \mathcal{P}$에 대하여, $A \neq B$ 이면 $A \cap B = \phi$

(b) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = X$

- X의 분할 : 집합 X를 서로소인 부분집합들로 나누어 놓은 것

3.3 분할과 동치관계

정의 5

집합 $X(X \neq \phi)$의 임의의 부분집합 AB, B, C에 관하여 다음이 성립할 때, 집합 $\mathcal{P}$를 X의 분할(partition)이라고 한다.

(a) $A, B \in \mathcal{P}$에 대하여, $A \neq B$ 이면 $A \cap B = \phi$

(b) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = X$

- X의 분할 : 집합 X를 서로소인 부분집합들로 나누어 놓은 것

예제 6

m은 임의의 양의 정수일 때, $0 \leq j < m$인 각 정수 j에 대하여

$$\mathbb{Z}_j = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - j = km \text{ for some } k \in \mathbb{Z}\}$$

이라 놓으면, 첨수집합족

$$\{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \cdots, \mathbb{Z}_{m-1}\}$$

은 집합 $\mathbb{Z}$의 하나의 분할이다.

특히, $m = 2$인 경우,

$$\mathbb{Z}_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\text{는 짝수이다}\}$$

$$\mathbb{Z}_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x\text{는 홀수이다}\}$$

정의 6

$\mathcal{E}$가 집합 $X(X \neq \phi)$위의 동치관계일 때, 각 $x \in X$에 대하여

$$x/\mathcal{E} = \{y \in X \mid y\mathcal{E}x\}$$

로 정의된 집합을 x에 따른 동치류(equivalence class)라고 한다. 그리고 X에서의 모든 동치류들의 집합을 $X/\mathcal{E}$로 나타낸다. 즉,

$$X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} \mid x \in X\}$$

- $X/\mathcal{E}$를 'X 법 $\mathcal{E}$'라고 읽는다.

정의 6

$\mathcal{E}$가 집합 $X(X \neq \phi)$위의 동치관계일 때, 각 $x \in X$에 대하여

$$x/\mathcal{E} = \{y \in X \mid y\mathcal{E}x\}$$

로 정의된 집합을 x에 따른 동치류(equivalence class)라고 한다. 그리고 X에서의 모든 동치류들의 집합을 $X/\mathcal{E}$로 나타낸다. 즉,

$$X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} \mid x \in X\}$$

- $X/\mathcal{E}$를 'X 법 $\mathcal{E}$'라고 읽는다.

정리 3

$\mathcal{E}$가 집합 $X(X \neq \phi)$위의 동치관계라 하자. 그러면

(a) 각 동치류 $x/\mathcal{E}$는 X의 공집합이 아닌 부분집합이다.

(b) $x\mathcal{E}y \;\Leftrightarrow\; x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi$

(c) $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; x\mathcal{E}y$

정리 3

$\mathcal{E}$가 집합 $X(X \neq \phi)$위의 동치관계라 하자. 그러면

(a) 각 동치류 $x/\mathcal{E}$는 X의 공집합이 아닌 부분집합이다.

(b) $x\mathcal{E}y \Leftrightarrow x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi$

(c) $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \Leftrightarrow x\mathcal{E}y$

정리 3

$\mathcal{E}$가 집합 $X(X \neq \phi)$위의 동치관계라 하자. 그러면

(a) 각 동치류 $x/\mathcal{E}$는 X의 공집합이 아닌 부분집합이다.

(b) $x\mathcal{E}y \;\Leftrightarrow\; x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi$

(c) $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; x\mathcal{E}y$

정리 3

$\mathcal{E}$가 집합 $X(X \neq \phi)$위의 동치관계라 하자. 그러면

(a) 각 동치류 $x/\mathcal{E}$는 X의 공집합이 아닌 부분집합이다.

(b) $x\mathcal{E}y \;\Leftrightarrow\; x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi$

(c) $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; x\mathcal{E}y$

증명

(a) <u>각 동치류 $x/\mathcal{E}$는 X의 공집합이 아닌 부분집합이다.</u>

동치관계 $\mathcal{E}$는 반사적이므로 각 $x \in X$에 대하여 $x\mathcal{E}x$이다.
따라서 동치류의 정의에 의하여 $x \in x/\mathcal{E}$.
그러므로 $x/\mathcal{E} \neq \phi$이다.

(b) $\underline{x\mathcal{E}y \;\Leftrightarrow\; x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi}$

$$
\begin{aligned}
x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi &\Leftrightarrow \exists z\,(z \in x/\mathcal{E} \wedge z \in y/\mathcal{E}) \\
&\Leftrightarrow z\mathcal{E}x \wedge z\mathcal{E}y && \text{(동치류의 정의)} \\
&\Leftrightarrow x\mathcal{E}z \wedge z\mathcal{E}y && (\mathcal{E}\text{는 대칭적}) \\
&\Leftrightarrow x\mathcal{E}y && (\mathcal{E}\text{는 추이적})
\end{aligned}
$$

그러므로 $x\mathcal{E}y \;\Leftrightarrow\; x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi$이다.

(c) $\underline{x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; x\mathcal{E}y}$

$(\Rightarrow)$: $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$라 가정하자. 그러면 (a)에 의하여 두 동치류 $x/\mathcal{E}$와 $y/\mathcal{E}$는 공집합이 아니다. 즉, $x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} = x/\mathcal{E} \neq \phi$이다.
따라서 (b)에 의하여 $x\mathcal{E}y$이다.
$(\Leftarrow)$: $x\mathcal{E}y$라 가정하자. 그러면
임의의 원소 $z \in X$에 대하여 $z \in x/\mathcal{E}$이면, 동치류의 정의에 의하여 $z\mathcal{E}x$이다. 가정에서 $x\mathcal{E}y$이므로, $z\mathcal{E}x \wedge x\mathcal{E}y$이다.
또한, $\mathcal{E}$는 추이적이므로 $z\mathcal{E}y$이다. 즉, $z \in y/\mathcal{E}$이다. 따라서 $x/\mathcal{E} \subseteq y/\mathcal{E}$이다.
마찬가지로, $y/\mathcal{E} \subseteq x/\mathcal{E}$도 성립한다.
그러므로 $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$ □

3.3 분할과 동치관계

정리 4

$\mathcal{E}$가 집합 X위의 동치관계라 하자. 그러면 $X/\mathcal{E}$는 X의 분할이다.

증명

정리 3(a)와 동치류의 정의에 의하여 $X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} \mid x \in X\}$는 X의 부분집합들의 족이다.

정리 3(b)와 (c)로부터 다음 명제를 얻을 수 있다.

$$x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi \;\Rightarrow\; x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$$

즉, 분할의 첫 번째 조건

$$x/\mathcal{E} \neq y/\mathcal{E} \;\Rightarrow\; x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} = \phi$$

이 성립한다.

정리 4

$\mathcal{E}$가 집합 X위의 동치관계라 하자. 그러면 $X/\mathcal{E}$는 X의 분할이다.

증명

정리 3(a)와 동치류의 정의에 의하여 $X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} \mid x \in X\}$는 X의 부분집합들의 족이다.
정리 3(b)와 (c)로부터 다음 명제를 얻을 수 있다.

$$x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \phi \ \Rightarrow \ x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$$

즉, 분할의 첫 번째 조건

$$x/\mathcal{E} \neq y/\mathcal{E} \ \Rightarrow \ x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} = \phi$$

이 성립한다.

끝으로 분할의 두 번째 조건 $\bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E} = X$이 성립함을 보이자.
임의의 $x \in X$에 대하여 $x \in x/\mathcal{E}$이므로 $X \subseteq \bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E}$이다. 한편 동치류의 정의에 의하여, $\bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E} \subseteq X$이다.
따라서 $\bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E} = X$. 그러므로 $X/\mathcal{E}$는 X의 분할이다. $\square$

3.3 분할과 동치관계

정의 7

$\mathcal{T}$가 집합 X의 분할이라 하자. 그러면 X 위의 관계 $X/\mathcal{T}$를 다음과 같이 정의한다:

$$x(X/\mathcal{T})y \quad \text{iff } x, y \in A \text{ for some } A \in \mathcal{T}$$

주의

세 기호 $x/\mathcal{E}$, $X/\mathcal{E}$, $X/\mathcal{T}$의 차이점을 분명히 익혀야 한다.

정의 7

$\mathcal{T}$가 집합 X의 분할이라 하자. 그러면 X 위의 관계 $X/\mathcal{T}$를 다음과 같이 정의한다:

$$x(X/\mathcal{T})y \quad \text{iff } x, y \in A \text{ for some } A \in \mathcal{T}$$

주의

세 기호 $x/\mathcal{E}$, $X/\mathcal{E}$, $X/\mathcal{T}$의 차이점을 분명히 익혀야 한다.

정리 5

$\mathcal{T}$가 집합 X 위의 분할이라 하자. 그러면

(a) 관계 $X/\mathcal{T}$는 동치관계이다.

(b) 동치관계 $X/\mathcal{T}$에 의해 유도된 동치류들은 바로 분할 $\mathcal{T}$를 이룬다. 즉,

$$X/(X/\mathcal{T}) = \mathcal{T}$$

3.3 분할과 동치관계

정리 5

$\mathcal{T}$가 집합 X 위의 분할이라 하자. 그러면

(a) 관계 $X/\mathcal{T}$는 동치관계이다.

(b) 동치관계 $X/\mathcal{T}$에 의해 유도된 동치류들은 바로 분할 $\mathcal{T}$를 이룬다. 즉,

$$X/(X/\mathcal{T}) = \mathcal{T}$$

정리 5

$\mathcal{T}$가 집합 X 위의 분할이라 하자. 그러면

(a) 관계 $X/\mathcal{T}$는 동치관계이다.

(b) 동치관계 $X/\mathcal{T}$에 의해 유도된 동치류들은 바로 분할 $\mathcal{T}$를 이룬다. 즉,

$$X/(X/\mathcal{T}) = \mathcal{T}$$

증명

(a) (1) <u>$X/\mathcal{T}$는 반사적이다.</u>

$\mathcal{T}$는 분할이므로 각 원소 $x \in X$에 대하여 $x \in A$인 $A \in \mathcal{T}$가 존재한다. 따라서 각 원소 $x \in X$에 대하여 $x(X/\mathcal{T})x$이다.

(2) <u>$X/\mathcal{T}$는 대칭적이다.</u>

$X/\mathcal{T}$의 정의로부터 대칭적이다(check!)

(3) $X/\mathcal{T}$는 추이적이다.

$x(X/\mathcal{T})y$ 이고 $y(X/\mathcal{T})z$라 가정하자. 그러면
어떤 $A, B \in \mathcal{T}$에 대하여

$$x, y \in A \quad \wedge \quad y, z \in B$$

이 성립한다. 이 때, $y \in A \cap B$이므로 $A \cap B \neq \phi$이다. 한편
분할의 정의로부터 $A = B$이므로 $x, z \in A$이다. 따라서
$x(X/\mathcal{T})z$이다.
그러므로 $X/\mathcal{T}$는 동치관계이다.

(b) $\underline{X/(X/\mathcal{T}) = \mathcal{T}}$

$$X/(X/\mathcal{T}) = \{x/(X/\mathcal{T}) \mid x \in X\}$$

와

$$x/(X/\mathcal{T}) = \{y \in X \mid y(X/\mathcal{T})x\}$$

임을 주목하자.

$X/(X/\mathcal{T}) = \mathcal{T}$를 보이기 위하여 다음을 증명해야 한다:

(1) $\forall x \in X, \exists A \in \mathcal{T}$ s.t. $x/(X/\mathcal{T}) = A$. $(X/(X/\mathcal{T}) = \mathcal{T})$

(2) $\forall A \in \mathcal{T}, \exists x \in X$ s.t. $A = x/(X/\mathcal{T})$. $(\mathcal{T} \subseteq X/(X/\mathcal{T}))$

자세한 증명은 판서 확인. □

연습문제 3.3

- 1, 6 번 : 스스로 해결
- 3, 5 번 : 조별 과제. 5월 7일까지

연습문제 3.3

- 1, 6 번 : 스스로 해결
- 3, 5 번 : 조별 과제. 5월 7일까지

연습문제 3.3

- 1, 6 번 : 스스로 해결
- 3, 5 번 : 조별 과제. 5월 7일까지