3장 관계와 함수(Relations and Functions)

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천 옮김/경문사

3.2 관계(Relation)

임의의 집합 $X(\neq \phi)$에 대하여 동치관계는 적어도 두 개 존재한다.

- $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ (항등관계(대각관계)라 한다.)
- $X \times X$은 X 위의 가장 큰 동치관계이다.

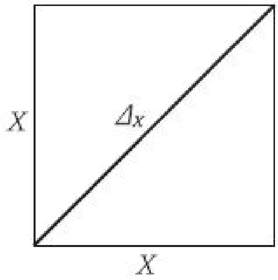

그림 8

3.2 관계(Relation)

임의의 집합 $X(\neq \phi)$에 대하여 동치관계는 적어도 두 개 존재한다.

- $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ (항등관계(대각관계)라 한다.)
- $X \times X$은 X 위의 가장 큰 동치관계이다.

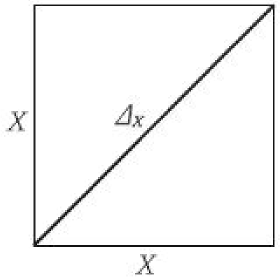

그림 8

임의의 집합 $X(\neq \phi)$에 대하여 동치관계는 적어도 두 개 존재한다.

- $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ (항등관계(대각관계)라 한다.)
- $X \times X$은 X 위의 가장 큰 동치관계이다.

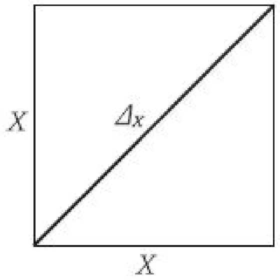

그림 8

예제 5

m이 임의로 정해진 양의 정수일 때 집합 $\mathbb{Z}$ 위에서의 **법** m에 관한 **합동관계**(또는 간단히 **합동** $\equiv$)는 다음과 같이 정의된다:

$$x \equiv y \pmod{m} \quad \text{iff} \quad x - y = km \text{ for some } k \in \mathbb{Z}.$$

이 합동은 집합 $\mathbb{Z}$ 위의 동치관계임을 보여라.

증명

(a) 임의의 $x \in \mathbb{Z}$에 대하여, $x - x = 0 \cdot m$이므로 $x \equiv x \pmod{m}$.

그러므로 합동 $\equiv$는 반사적이다.

예제 5

m이 임의로 정해진 양의 정수일 때 집합 $\mathbb{Z}$ 위에서의 법 m에 관한 합동관계(또는 간단히 합동 $\equiv$)는 다음과 같이 정의된다:

$$x \equiv y \pmod{m} \quad \text{iff} \quad x - y = km \text{ for some } k \in \mathbb{Z}.$$

이 합동은 집합 $\mathbb{Z}$ 위의 동치관계임을 보여라.

증명

(a) 임의의 $x \in \mathbb{Z}$에 대하여, $x - x = 0 \cdot m$이므로 $x \equiv x \pmod{m}$.
그러므로 합동 $\equiv$는 반사적이다.

(b) $x \equiv y (\mathrm{mod}\ m)$이라 하자. 그러면 적당한 $k \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$x - y = km$$

이므로,

$$y - x = (-k)m \text{이고 } -k \in \mathbb{Z}$$

이다. 따라서 $y \equiv x (\mathrm{mod}\ m)$. 그러므로 합동 $\equiv$는 대칭적이다.

(c) $x \equiv y \pmod{m}$이고 $y \equiv z \pmod{m}$이라 하자. 그러면 적당한 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$x - y = k_1 m, \quad y - z = k_2 m$$

이므로

$$x - z = (x - y) + (y - z) = k_1 m + k_2 m = (k_1 + k_2)m$$

이다. 즉,

$$x - z = (k_1 + k_2)m\text{이고 } k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$$

이다. 따라서 $x \equiv z \pmod{m}$. 그러므로 합동 $\equiv$는 추이적이다.

(a), (b), (c)에 의하여 합동 $\equiv$는 $\mathbb{Z}$ 위의 동치관계이다. □

참고

예제 5에서

- $m = 2$인 경우,

$$x \equiv y \pmod 2 \quad \text{iff} \quad x - y = 2k \text{ for some } k \in \mathbb{Z}$$

  즉 $x - y$가 모두 짝수이거나 홀수일 필요충분조건은 $x \equiv y \pmod 2$이다.

- $x \equiv y \pmod m$은 x와 y를 m으로 나누었을 때의 나머지가 같음을 의미.

참고

예제 5에서

- $m = 2$인 경우,

$$x \equiv y \pmod 2 \quad \text{iff} \quad x - y = 2k \text{ for some } k \in \mathbb{Z}$$

즉 $x - y$가 모두 짝수이거나 홀수일 필요충분조건은 $x \equiv y \pmod 2$이다.

- $x \equiv y \pmod m$은 x와 y를 m으로 나누었을 때의 나머지가 같음을 의미.

참고

예제 5에서

- $m = 2$인 경우,

$$x \equiv y \pmod 2 \quad \text{iff} \quad x - y = 2k \text{ for some } k \in \mathbb{Z}$$

  즉 $x - y$가 모두 짝수이거나 홀수일 필요충분조건은 $x \equiv y \pmod 2$이다.

- $x \equiv y \pmod m$은 x와 y를 m으로 나누었을 때의 나머지가 같음을 의미.

연습문제 3.2

2, 3, 4, 5, 6, 8(b) 번 : 개인별 숙제, 4월 30일까지

8(b) 번 오타수정 : $ad = bc \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \sim (c, d)$

3.2 관계(Relation)