2장 집합의 개념(The Concept of Sets)
3장 관계와 함수(Relations and Functions)

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이홍천 옮김/경문사

2.7 러셀의 역리(참고)

수학계의 충격

1902년 영국의 철학자 러셀(1872-1970)은 집합을 원소로 하는 모든 집합의 집합을 허용한다면 모순이 일어난다는 사실을 주장함으로써 수학계에 큰 충격을 주었다.

2.7 러셀의 역리(참고)

보조정리 1

모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다고 가정하고 $R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$이라 하자. 그러면 $R \notin R$.

증명

(모순법) $R \in R$이라 가정하자. 그러면 집합 R의 정의에 의하여 $R \notin R$이다. 이것은 가정 $R \in R$에 모순이므로 위 명제의 결론 $R \notin R$은 참이다. □

2.7 러셀의 역리(참고)

보조정리 1

모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다고 가정하고
$R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$이라 하자. 그러면 $R \notin R$.

증명

(모순법) $R \in R$이라 가정하자. 그러면 집합 R의 정의에 의하여 $R \notin R$이다. 이것은 가정 $R \in R$에 모순이므로 위 명제의 결론 $R \notin R$은 참이다. $\square$

보조정리 2

모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다고 가정하고
$R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$이라 하자. 그러면 $R \in R$.

증명

(모순법) $R \notin R$이라 가정하자. 그러면 집합 R의 정의에 의하여
$R \in R$이다. 이것은 가정 $R \notin R$에 모순이므로 위 명제의 결론
$R \in R$은 참이다. □

2.7 러셀의 역리(참고)

보조정리 2

모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다고 가정하고
$R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$이라 하자. 그러면 $R \in R$.

증명

(모순법) $R \notin R$이라 가정하자. 그러면 집합 R의 정의에 의하여 $R \in R$이다. 이것은 가정 $R \notin R$에 모순이므로 위 명제의 결론 $R \in R$은 참이다. $\square$

정리 10

모든 집합들을 원소로 하는 집합 $\mathcal{U}$는 존재하지 않는다.

증명

보조정리 1과 보조정리 2로부터 다음을 얻는다:

$$R \notin R \wedge R \in R \equiv c$$

그러므로 두 보조정리의 가정인 모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다는 것은 모순이다. □

2.7 러셀의 역리(참고)

정리 10

모든 집합들을 원소로 하는 집합 $\mathcal{U}$는 존재하지 않는다.

증명

보조정리 1과 보조정리 2로부터 다음을 얻는다:

$$R \notin R \wedge R \in R \equiv c$$

그러므로 두 보조정리의 가정인 모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다는 것은 모순이다. □

2.7 러셀의 역리(참고)

질문

우주는 끝이 없을까?

정의

- 임의의 두 대상 a, b에 대하여 순서쌍(ordered pair)이라고 하는 (a, b)를 구성할 수 있다.
- "ordered" 는 순서쌍 (a, b)에서 a, b의 순서가 중요함을 강조
- 순서쌍 (a, b)는 집합 $\{a, b\}$와 다르다.
- 순서쌍 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$아 같이 정의하기도 함.
- $(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \wedge \ b = d$

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

정의

- 임의의 두 대상 a, b에 대하여 순서쌍(ordered pair)이라고 하는 (a, b)를 구성할 수 있다.
- "ordered" 는 순서쌍 (a, b)에서 a, b의 순서가 중요함을 강조
- 순서쌍 (a, b)는 집합 $\{a, b\}$와 다르다.
- 순서쌍 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$아 같이 정의하기도 함.
- $(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \wedge \ b = d$

정의

- 임의의 두 대상 a, b에 대하여 순서쌍(ordered pair)이라고 하는 (a, b)를 구성할 수 있다.
- "ordered"는 순서쌍 (a, b)에서 a, b의 순서가 중요함을 강조
- 순서쌍 (a, b)는 집합 $\{a, b\}$와 다르다.
- 순서쌍 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$아 같이 정의하기도 함.
- $(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \wedge \ b = d$

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

정의

- 임의의 두 대상 a, b에 대하여 순서쌍(ordered pair)이라고 하는 (a, b)를 구성할 수 있다.
- "ordered"는 순서쌍 (a, b)에서 a, b의 순서가 중요함을 강조
- 순서쌍 (a, b)는 집합 $\{a, b\}$와 다르다.
- 순서쌍 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$아 같이 정의하기도 함.
- $(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \wedge \ b = d$

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

정의

- 임의의 두 대상 a, b에 대하여 순서쌍(ordered pair)이라고 하는 (a, b)를 구성할 수 있다.
- "ordered"는 순서쌍 (a, b)에서 a, b의 순서가 중요함을 강조
- 순서쌍 (a, b)는 집합 $\{a, b\}$와 다르다.
- 순서쌍 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$아 같이 정의하기도 함.
- $(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \wedge \ b = d$

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

정의

- 임의의 두 대상 a, b에 대하여 순서쌍(ordered pair)이라고 하는 (a, b)를 구성할 수 있다.
- "ordered" 는 순서쌍 (a, b)에서 a, b의 순서가 중요함을 강조
- 순서쌍 (a, b)는 집합 $\{a, b\}$와 다르다.
- 순서쌍 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$아 같이 정의하기도 함.
- $(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \wedge \ b = d$

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

정의 1

임의의 두 집합 A, B에 대하여 $x \in A$, $y \in B$의 순서쌍 (x, y)의 집합을 A, B의 데카르트 곱이라 하고 $A \times B$로 나타낸다. 즉,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

- 순서쌍 (a, b)에서 a, b를 각각 첫째 좌표, 둘째 좌표라고 한다.

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

정의 1

임의의 두 집합 A, B에 대하여 $x \in A$, $y \in B$의 순서쌍 (x, y)의 집합을 A, B의 **데카르트 곱**이라 하고 $A \times B$로 나타낸다. 즉,

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

- 순서쌍 (a, b)에서 a, b를 각각 **첫째 좌표, 둘째 좌표**라고 한다.

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

예제 1

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$에 대하여 $A \times B$와 $B \times A$를 각각 구하여라.

풀이

데카르트곱의 정의에 의하여

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

□

- $A \times B \neq B \times A$에 유의
- 교재의 그림 7 참조

예제 1

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$에 대하여 $A \times B$와 $B \times A$를 각각 구하여라.

풀이

데카르트곱의 정의에 의하여

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$
$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$\square$

- $A \times B \neq B \times A$에 유의
- 교재의 그림 7 참조

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

예제 1

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$에 대하여 $A \times B$와 $B \times A$를 각각 구하여라.

풀이

데카르트곱의 정의에 의하여

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$
$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

□

- $A \times B \neq B \times A$에 유의
- 교재의 그림 7 참조

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

예제 1

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$에 대하여 $A \times B$와 $B \times A$를 각각 구하여라.

풀이

데카르트곱의 정의에 의하여

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$
$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$\square$

- $A \times B \neq B \times A$에 유의
- 교재의 그림 7 참조

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

참고

$A = B = \mathbb{R}$인 경우

$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R}\}$$

은 해석기하학에서의 좌표평면을 뜻한다.

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

예제 2

임의의 집합 A에 대하여 $A \times \phi$, $\phi \times A$를 각각 구하여라.

풀이

$$A \times \phi = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in \phi\}$$

이고 "$b \in \phi$"은 항상 거짓이므로 임의의 순서쌍 (a, b)에 대하여 "$(a, b) \in A \times \phi$"은 거짓이다. 따라서 $A \times \phi = \phi$. 마찬가지로 $\phi \times A = \phi$이다. □

예제 2

임의의 집합 A에 대하여 $A \times \phi$, $\phi \times A$를 각각 구하여라.

풀이

$$A \times \phi = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in \phi\}$$

이고 "$b \in \phi$"은 항상 거짓이므로 임의의 순서쌍 (a, b)에 대하여 "$(a, b) \in A \times \phi$"은 거짓이다. 따라서 $A \times \phi = \phi$. 마찬가지로 $\phi \times A = \phi$이다. □

정리 1 (분배법칙)

임의의 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

정리 1 (분배법칙)

임의의 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

정리 1 (분배법칙)

임의의 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

증명

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$(a, x) \in A \times (B \cap C)$

$\Leftrightarrow a \in A \ \wedge \ x \in B \cap C$ ($\times$의 정의)

$\Leftrightarrow a \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \in C)$ ($\cap$의 정의)

$\Leftrightarrow (a \in A \ \wedge a \in A) \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \in C)$ (멱등법칙)

$\Leftrightarrow (a \in A \ \wedge x \in B) \ \wedge \ (a \in A \ \wedge \ x \in C)$ (교환법칙, 결합법칙)

$\Leftrightarrow (a, x) \in A \times B \ \wedge \ (a, x) \in A \times C$ ($\times$의 정의)

$\Leftrightarrow (a, x) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ ($\cap$의 정의)

그러므로 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$이 성립한다.
(b)는 연습문제 $\square$

정리 2 (분배법칙)

임의의 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

증명

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

$(a, x) \in A \times (B - C)$

$\Leftrightarrow a \in A \ \wedge \ x \in B - C$ (×의 정의)

$\Leftrightarrow a \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \notin C)$ (−의 정의)

$\Leftrightarrow (a \in A \ \wedge a \in A) \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \notin C)$ (멱등법칙)

$\Leftrightarrow (a \in A \ \wedge x \in B) \ \wedge \ (a \in A \ \wedge \ x \notin C)$ (교환법칙, 결합법칙)

$\Leftrightarrow (a, x) \in A \times B \ \wedge \ (a, x) \notin A \times C$ (×의 정의)

$\Leftrightarrow (a, x) \in (A \times B) - (A \times C)$ (−의 정의)

그러므로 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$이 성립한다. $\square$

- 위 증명에서 빨간색으로 칠해진 명제 부분의 "$\Leftarrow$"을 증명해 보세요. (힌트, 명제 "$(a, x) \in A \times C$"의 부정과 동치인 논리명제를 생각)

3.1 두 집합의 데카르트곱(Cartesian Product)

그러므로 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$이 성립한다. $\square$

- 위 증명에서 빨간색으로 칠해진 명제 부분의 "$\Leftarrow$"을 증명해 보세요. (힌트, 명제 "$(a, x) \in A \times C$"의 부정과 동치인 논리명제를 생각)

연습문제 3.1

3, 4번 : 스스로 해결

5, 7, 8(b), 8(c)번 : 조별 숙제 4월 16일까지

정의 2

집합 A에서 집합 B로의 관계 $\mathcal{R}$은 데카르트 곱 $A \times B$의 부분집합을 뜻한다. 여기서 $(a, b) \in \mathcal{R}$을 ${}_a\mathcal{R}_b$와 같이 나타내고, 이 기호를 "a는 $\mathcal{R}$에 따라 b와 관계된다."라고 읽는다.

- $A = B = X$인 경우는 간단히, "X에서의 관계 $\mathcal{R}$"이라고 읽는다.
- ex) A는 W 대학교 교수들의 집합, B는 W 대학교 학과(부)들의 집합
  "a는 b 학과(부)의 교수이다"를 A에서 B로의 관계라 정의할 때,
  (김준희, 수학교육과) $\in \mathcal{R}$.

3.2 관계(Relation)

정의 2

집합 A에서 집합 B로의 관계 $\mathcal{R}$은 데카르트 곱 $A \times B$의 부분집합을 뜻한다. 여기서 $(a, b) \in \mathcal{R}$을 ${}_a\mathcal{R}_b$와 같이 나타내고, 이 기호를 "a는 $\mathcal{R}$에 따라 b와 관계된다."라고 읽는다.

- $A = B = X$인 경우는 간단히, "X에서의 관계 $\mathcal{R}$"이라고 읽는다.
- ex) A는 W 대학교 교수들의 집합, B는 W 대학교 학과(부)들의 집합
  "a는 b 학과(부)의 교수이다"를 A에서 B로의 관계라 정의할 때,
  (김준희, 수학교육과) $\in \mathcal{R}$.

3.2 관계(Relation)

정의 2

집합 A에서 집합 B로의 관계 $\mathcal{R}$은 데카르트 곱 $A \times B$의 부분집합을 뜻한다. 여기서 $(a, b) \in \mathcal{R}$을 ${}_a\mathcal{R}_b$와 같이 나타내고, 이 기호를 "a는 $\mathcal{R}$에 따라 b와 관계된다."라고 읽는다.

- $A = B = X$인 경우는 간단히, "X에서의 관계 $\mathcal{R}$"이라고 읽는다.
- ex) A는 W 대학교 교수들의 집합, B는 W 대학교 학과(부)들의 집합
  "a는 b 학과(부)의 교수이다"를 A에서 B로의 관계라 정의할 때,
  (김준희, 수학교육과) $\in \mathcal{R}$.

정의 3

임의의 집합 A, B에 대하여 A에서 B로의 관계 $\mathcal{R}$의 역관계를 $\mathcal{R}^{-1}$로 나타내고, 다음과 같이 정의한다 :

$$_a\mathcal{R}_b \quad \Leftrightarrow \quad {}_b\mathcal{R}^{-1}{}_a$$

즉,

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

예제 3

(a) $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$에 대하여 $\mathcal{R} = \{(a, x), (b, y)\}$라 놓으면, $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, a), (y, b)\}$.

(b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x$는 y의 약수이다$\}$일 때, $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, y$는 x의 배수이다$\}$.

예제 3

(a) $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$에 대하여 $\mathcal{R} = \{(a, x), (b, y)\}$라 놓으면, $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, a), (y, b)\}$.

(b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x$는 y의 약수이다$\}$일 때, $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, y$는 x의 배수이다$\}$.

예제 3

(a) $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$에 대하여 $\mathcal{R} = \{(a, x), (b, y)\}$라 놓으면, $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, a), (y, b)\}$.

(b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x$는 y의 약수이다$\}$일 때, $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, y$는 x의 배수이다$\}$.

정의

집합 A에서 집합 B로의 관계 $\mathcal{R}$에서, 적당한(어떤) $b \in B$에 대하여 ${}_a\mathcal{R}_b$인 모든 $a \in A$의 집합을 $\mathcal{R}$의 정의역(domain)이라 하고 $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$로 나타낸다. 즉,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A \,|\, (a, b) \in \mathcal{R} \text{ for some } b \in B\}$$

3.2 관계(Relation)

정의

집합 A에서 집합 B로의 관계 $\mathcal{R}$에서, 적당한(어떤) $a \in A$에 대하여 ${}_a\mathcal{R}_b$인 모든 $b \in B$의 집합을 $\mathcal{R}$의 상(image)이라 하고 $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$로 나타낸다. 즉,

$$\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B \,|\, (a, b) \in \mathcal{R} \text{ for some } a \in A\}$$

- Key Point : $(a, b) \in \mathcal{R}$이면, $a \in \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$이고 $b \in \mathrm{Im}(\mathcal{R})$.

정의

집합 A에서 집합 B로의 관계 $\mathcal{R}$에서, 적당한(어떤) $a \in A$에 대하여 ${}_a\mathcal{R}_b$인 모든 $b \in B$의 집합을 $\mathcal{R}$의 상(image)이라 하고 $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$로 나타낸다. 즉,

$$\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B \,|\, (a, b) \in \mathcal{R} \text{ for some } a \in A\}$$

- Key Point : $(a, b) \in \mathcal{R}$이면,
  $a \in \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$이고 $b \in \mathrm{Im}(\mathcal{R})$.

예제 3(a)

$A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, $\mathcal{R} = \{(a, x), (b, y)\}$

예제 4

예제 3(a)에 대하여 $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{a, b\}$, $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{x, y\}$

예제 3(b)는 스스로 생각.

예제 3(a)

$A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, $\mathcal{R} = \{(a, x), (b, y)\}$

예제 4

예제 3(a)에 대하여 $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{a, b\}$, $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{x, y\}$

예제 3(b)는 스스로 생각.

정의 4

집합 $X(\neq \phi)$에서의 관계 $\mathcal{R}$에 대하여 다음을 정의한다.

(a) $\mathcal{R}$은 반사적이다. $\equiv$ $\forall x \in X, \ {}_x\mathcal{R}_x$

(b) $\mathcal{R}$은 대칭적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \Rightarrow {}_y\mathcal{R}_x$

(c) $\mathcal{R}$은 추이적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \wedge {}_y\mathcal{R}_z \Rightarrow {}_x\mathcal{R}_z$

(d) $\mathcal{R}$은 동치관계이다 $\equiv$ $\mathcal{R}$이 반사적, 대칭적, 추이적

- 반사적(reflexive), 대칭적(symmetric), 추이적(transitive), 동치관계(equivalence relation)
- 처음 세 정의를 각각 반사율, 대칭율, 추이율이라고도 말한다.

정의 4

집합 $X(\neq \phi)$에서의 관계 $\mathcal{R}$에 대하여 다음을 정의한다.

(a) $\mathcal{R}$은 반사적이다. $\equiv$ $\forall x \in X,\ {}_x\mathcal{R}_x$

(b) $\mathcal{R}$은 대칭적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \Rightarrow {}_y\mathcal{R}_x$

(c) $\mathcal{R}$은 추이적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \wedge {}_y\mathcal{R}_z \Rightarrow {}_x\mathcal{R}_z$

(d) $\mathcal{R}$은 동치관계이다 $\equiv$ $\mathcal{R}$이 반사적, 대칭적, 추이적

- 반사적(reflexive), 대칭적(symmetric), 추이적(transitive), 동치관계(equivalence relation)
- 처음 세 정의를 각각 반사율, 대칭율, 추이율이라고도 말한다.

정의 4

집합 $X(\neq \phi)$에서의 관계 $\mathcal{R}$에 대하여 다음을 정의한다.

(a) $\mathcal{R}$은 반사적이다. $\equiv$ $\forall x \in X,\ {}_x\mathcal{R}_x$

(b) $\mathcal{R}$은 대칭적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \Rightarrow {}_y\mathcal{R}_x$

(c) $\mathcal{R}$은 추이적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \wedge {}_y\mathcal{R}_z \Rightarrow {}_x\mathcal{R}_z$

(d) $\mathcal{R}$은 동치관계이다 $\equiv$ $\mathcal{R}$이 반사적, 대칭적, 추이적

- 반사적(reflexive), 대칭적(symmetric), 추이적(transitive), 동치관계(equivalence relation)
- 처음 세 정의를 각각 반사율, 대칭율, 추이율이라고도 말한다.

정의 4

집합 $X(\neq \phi)$에서의 관계 $\mathcal{R}$에 대하여 다음을 정의한다.

(a) $\mathcal{R}$은 반사적이다. $\equiv$ $\forall x \in X,\ x\mathcal{R}x$

(b) $\mathcal{R}$은 대칭적이다. $\equiv$ $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

(c) $\mathcal{R}$은 추이적이다. $\equiv$ $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

(d) $\mathcal{R}$은 동치관계이다 $\equiv$ $\mathcal{R}$이 반사적, 대칭적, 추이적

- 반사적(reflexive), 대칭적(symmetric), 추이적(transitive), 동치관계(equivalence relation)
- 처음 세 정의를 각각 반사율, 대칭율, 추이율이라고도 말한다.

정의 4

집합 $X(\neq \phi)$에서의 관계 $\mathcal{R}$에 대하여 다음을 정의한다.

(a) $\mathcal{R}$은 반사적이다. $\equiv$ $\forall x \in X,\ {}_x\mathcal{R}_x$

(b) $\mathcal{R}$은 대칭적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \ \Rightarrow\ {}_y\mathcal{R}_x$

(c) $\mathcal{R}$은 추이적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \wedge {}_y\mathcal{R}_z \ \Rightarrow\ {}_x\mathcal{R}_z$

(d) $\mathcal{R}$은 동치관계이다 $\equiv$ $\mathcal{R}$이 반사적, 대칭적, 추이적

- 반사적(reflexive), 대칭적(symmetric), 추이적(transitive), 동치관계(equivalence relation)
- 처음 세 정의를 각각 반사율, 대칭율, 추이율이라고도 말한다.

정의 4

집합 $X(\neq \phi)$에서의 관계 $\mathcal{R}$에 대하여 다음을 정의한다.

(a) $\mathcal{R}$은 반사적이다. $\equiv$ $\forall x \in X,\ {}_x\mathcal{R}_x$

(b) $\mathcal{R}$은 대칭적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \Rightarrow {}_y\mathcal{R}_x$

(c) $\mathcal{R}$은 추이적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \wedge {}_y\mathcal{R}_z \Rightarrow {}_x\mathcal{R}_z$

(d) $\mathcal{R}$은 동치관계이다 $\equiv$ $\mathcal{R}$이 반사적, 대칭적, 추이적

- 반사적(reflexive), 대칭적(symmetric), 추이적(transitive), 동치관계(equivalence relation)
- 처음 세 정의를 각각 반사율, 대칭율, 추이율이라고도 말한다.

정의 4

집합 $X(\neq \phi)$에서의 관계 $\mathcal{R}$에 대하여 다음을 정의한다.

(a) $\mathcal{R}$은 반사적이다. $\equiv$ $\forall x \in X,\ {}_x\mathcal{R}_x$

(b) $\mathcal{R}$은 대칭적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \Rightarrow {}_y\mathcal{R}_x$

(c) $\mathcal{R}$은 추이적이다. $\equiv$ ${}_x\mathcal{R}_y \wedge {}_y\mathcal{R}_z \Rightarrow {}_x\mathcal{R}_z$

(d) $\mathcal{R}$은 동치관계이다 $\equiv$ $\mathcal{R}$이 반사적, 대칭적, 추이적

- 반사적(reflexive), 대칭적(symmetric), 추이적(transitive), 동치관계(equivalence relation)
- 처음 세 정의를 각각 반사율, 대칭율, 추이율이라고도 말한다.

3.2 관계(Relation)

보기 1

$X = \{1,2,3,4\}$에서의 관계

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)\}$$

은 대칭적이지만, 반사적도 추이적도 아니다.

풀이

- $3 \in X$이지만 $(3,3) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 반사적이 아니다.
- $\mathcal{R}$은 대칭적이다(check!!!)
- $(1,4) \in \mathcal{R} \wedge (4,2) \in \mathcal{R}$이지만 $(1,2) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 추이적이 아니다. □

3.2 관계(Relation)

보기 1

$X = \{1, 2, 3, 4\}$에서의 관계

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

은 대칭적이지만, 반사적도 추이적도 아니다.

풀이

- $3 \in X$이지만 $(3,3) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 반사적이 아니다.
- $\mathcal{R}$은 대칭적이다(check!!!)
- $(1,4) \in \mathcal{R} \wedge (4,2) \in \mathcal{R}$이지만 $(1,2) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 추이적이 아니다. □

보기 1

$X = \{1, 2, 3, 4\}$에서의 관계

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

은 대칭적이지만, 반사적도 추이적도 아니다.

풀이

- $3 \in X$이지만 $(3,3) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 반사적이 아니다.
- $\mathcal{R}$은 대칭적이다(check!!!)
- $(1,4) \in \mathcal{R} \wedge (4,2) \in \mathcal{R}$이지만 $(1,2) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 추이적이 아니다. □

보기 1

$X = \{1, 2, 3, 4\}$에서의 관계

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

은 대칭적이지만, 반사적도 추이적도 아니다.

풀이

- $3 \in X$이지만 $(3,3) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 반사적이 아니다.
- $\mathcal{R}$은 대칭적이다(check!!!)
- $(1,4) \in \mathcal{R} \wedge (4,2) \in \mathcal{R}$이지만 $(1,2) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 추이적이 아니다. □

보기 1

$X = \{1, 2, 3, 4\}$에서의 관계

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

은 대칭적이지만, 반사적도 추이적도 아니다.

풀이

- $3 \in X$이지만 $(3,3) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 반사적이 아니다.
- $\mathcal{R}$은 대칭적이다(check!!!)
- $(1,4) \in \mathcal{R} \wedge (4,2) \in \mathcal{R}$이지만 $(1,2) \notin \mathcal{R}$이다. 따라서 $\mathcal{R}$은 추이적이 아니다. □

보기 2

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 상등관계(등식) $=$는 동치관계이다.

증명

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - x = 0$이므로, $x = x$이다(등식 $=$의 정의).

(2) $x = y \quad \Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y - x = 0$

$\Rightarrow \quad y = x.$

따라서 $x = y \quad \Rightarrow y = x.$

(3) $x = y \wedge y = z \quad \Rightarrow \quad x = z.$ (스스로 해결)

그러므로 관계 $=$은 동치관계이다. $\square$

3.2 관계(Relation)

보기 2

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 상등관계(등식) $=$는 동치관계이다.

증명

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - x = 0$이므로, $x = x$이다(등식 $=$의 정의).

(2) $x = y \quad \Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y - x = 0$

$\Rightarrow \quad y = x.$

따라서 $x = y \quad \Rightarrow y = x.$

(3) $x = y \wedge y = z \quad \Rightarrow \quad x = z.$ (스스로 해결)

그러므로 관계 $=$은 동치관계이다. $\square$

보기 2

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 상등관계(등식) $=$는 동치관계이다.

증명

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - x = 0$이므로, $x = x$이다(등식 $=$의 정의).

(2) $x = y \quad \Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y - x = 0$

$\Rightarrow \quad y = x.$

따라서 $x = y \quad \Rightarrow y = x.$

(3) $x = y \wedge y = z \quad \Rightarrow \quad x = z.$ (스스로 해결)

그러므로 관계 $=$은 동치관계이다. □

보기 2

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 상등관계(등식) $=$는 동치관계이다.

증명

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - x = 0$이므로, $x = x$이다(등식 $=$의 정의).

(2) $x = y \quad \Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y - x = 0$

$\Rightarrow \quad y = x.$

따라서 $x = y \quad \Rightarrow y = x.$

(3) $x = y \wedge y = z \quad \Rightarrow \quad x = z.$ (스스로 해결)

그러므로 관계 $=$은 동치관계이다. □

보기 2

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 상등관계(등식) $=$는 동치관계이다.

증명

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - x = 0$이므로, $x = x$이다(등식 $=$의 정의).

(2) $x = y \quad \Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y - x = 0$

$\Rightarrow \quad y = x.$

따라서 $x = y \quad \Rightarrow y = x.$

(3) $x = y \wedge y = z \quad \Rightarrow \quad x = z.$ (스스로 해결)

그러므로 관계 $=$은 동치관계이다. $\square$

중간고사 범위

- 1.1절 $\sim$ 3.2절 배운 데까지
- 강의시간에 언급한 연습문제(숙제, 스스로 해결 문제)
- 단, 1.8절, 2.5절, 2.7절, 2.8절 생략
- 7주차 수업 합니다.