2014년 1학기 논리와집합 (제4주)

2장 집합의 개념(The Concept of Sets)

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이홍천 옮김/경문사

2.1 집합과 부분집합

정의

우리의 직관 또는 사고의 대상으로서 서로 뚜렷이 구분되는 대상의 모임을 집합이라고 한다. 그리고 집합의 각 구성원을 원소라고 부른다.

예제

다음은 집합의 예들이다 :

- W 대학교 수학교육과 학생들의 모임
- 지구상의 국가들의 모임
- 문자 a, b, c, d 들의 모임
- 철수의 기숙사의 규칙들의 모임
- 제곱하면 2와 같은 유리수들의 모임
- 자연수들의 모임
- 0과 1 사이의 실수들의 모임

2.1 집합과 부분집합

예제

다음은 집합의 예들이다 :

- W 대학교 수학교육과 학생들의 모임
- 지구상의 국가들의 모임
- 문자 a, b, c, d 들의 모임
- 철수의 기숙사의 규칙들의 모임
- 제곱하면 2와 같은 유리수들의 모임
- 자연수들의 모임
- 0과 1 사이의 실수들의 모임

예제

다음은 집합의 예들이다 :

- W 대학교 수학교육과 학생들의 모임
- 지구상의 국가들의 모임
- 문자 a, b, c, d 들의 모임
- 철수의 기숙사의 규칙들의 모임
- 제곱하면 2와 같은 유리수들의 모임
- 자연수들의 모임
- 0과 1 사이의 실수들의 모임

2.1 집합과 부분집합

예제

다음은 집합의 예들이다 :

- W 대학교 수학교육과 학생들의 모임
- 지구상의 국가들의 모임
- 문자 a, b, c, d 들의 모임
- 철수의 기숙사의 규칙들의 모임
- 제곱하면 2와 같은 유리수들의 모임
- 자연수들의 모임
- 0과 1 사이의 실수들의 모임

2.1 집합과 부분집합

예제

다음은 집합의 예들이다 :

- W 대학교 수학교육과 학생들의 모임
- 지구상의 국가들의 모임
- 문자 a, b, c, d 들의 모임
- 철수의 기숙사의 규칙들의 모임
- 제곱하면 2와 같은 유리수들의 모임
- 자연수들의 모임
- 0과 1 사이의 실수들의 모임

2.1 집합과 부분집합

예제

다음은 집합의 예들이다 :

- W 대학교 수학교육과 학생들의 모임
- 지구상의 국가들의 모임
- 문자 a, b, c, d 들의 모임
- 철수의 기숙사의 규칙들의 모임
- 제곱하면 2와 같은 유리수들의 모임
- 자연수들의 모임
- 0과 1 사이의 실수들의 모임

2.1 집합과 부분집합

예제

다음은 집합의 예들이다 :

- W 대학교 수학교육과 학생들의 모임
- 지구상의 국가들의 모임
- 문자 a, b, c, d 들의 모임
- 철수의 기숙사의 규칙들의 모임
- 제곱하면 2와 같은 유리수들의 모임
- 자연수들의 모임
- 0과 1 사이의 실수들의 모임

2.1 집합과 부분집합

예제

다음은 집합의 예들이다 :

- W 대학교 수학교육과 학생들의 모임
- 지구상의 국가들의 모임
- 문자 a, b, c, d 들의 모임
- 철수의 기숙사의 규칙들의 모임
- 제곱하면 2와 같은 유리수들의 모임
- 자연수들의 모임
- 0과 1 사이의 실수들의 모임

2.1 집합과 부분집합

정의

원소의 개수를 자연수로 나타낼 수 있는 집합을 유한집합이라 하고, 유한집합이 아닌 집합을 무한집합이라 한다. 특히, 원소가 하나도 존재하지 않는 집합을 공집합이라 한다. 이것을 ϕ로 나타내고 유한집합으로 간주한다.

2.1 집합과 부분집합

정의 1

두 집합 A, B에 대하여 A의 원소와 B의 원소가 같을 때 A와 B는 같다고 하고 $A = B$로 나타낸다. 즉

$$A = B \quad \equiv \quad \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

한편 A와 B가 같지 않을 때는 $A \neq B$로 나타낸다. (참고 : 교재의 x 위치 오타)

정의 2

임의의 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B의 원소일 때 A는 B의 **부분집합**, B는 A의 **초집합** 또는 **포함집합**이라 하고 이것을 $A \subseteq B$ 또는 $B \supseteq A$와 같이 나타낸다. 즉,

$$A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

- $A \subseteq B$이고 $A \neq B$일 때, A를 B의 **진부분집합**, B는 A의 **진포함집합**이라 하고, $A \subset B$ 또는 $B \supset A$로 나타낸다.

2.1 집합과 부분집합

정의 2

임의의 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B의 원소일 때 A는 B의 부분집합, B는 A의 초집합 또는 포함집합이라 하고 이것을 $A \subseteq B$ 또는 $B \supseteq A$와 같이 나타낸다. 즉,

$$A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

- $A \subseteq B$이고 $A \neq B$일 때, A를 B의 진부분집합, B는 A의 진포함집합이라 하고, $A \subset B$ 또는 $B \supset A$로 나타낸다.

정리 1

공집합 ϕ는 임의의 집합의 부분집합이다.

증명

임의의 집합을 A라 놓고 다음 명제가 참임을 보이겠다.

$$\forall x(x \in \phi \rightarrow x \in A)$$

공집합 ϕ에는 원소가 존재하지 않으므로 임의의 x에 대하여 명제함수 "$x \in \phi$"는 거짓이다. 따라서, 명제 "$x \in \phi \rightarrow x \in A$"는 "$x \in A$"의 참, 거짓에 관계없이 항상 참이다. 그러므로 임의의 집합 A에 대하여 $\phi \subseteq A$. □

정리 1

공집합 ϕ는 임의의 집합의 부분집합이다.

증명

임의의 집합을 A라 놓고 다음 명제가 참임을 보이겠다.

$$\forall x (x \in \phi \to x \in A)$$

공집합 ϕ에는 원소가 존재하지 않으므로 임의의 x에 대하여 명제함수 "$x \in \phi$"는 거짓이다. 따라서, 명제 "$x \in \phi \to x \in A$"는 "$x \in A$"의 참, 거짓에 관계없이 항상 참이다. 그러므로 임의의 집합 A에 대하여 $\phi \subseteq A$. □

정리 2

임의의 집합 A, B, C에 대하여 $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$이면 $A \subseteq C$.

증명

$A \subseteq C$와 동치명제인

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

임을 밝히면 충분하다. 가정에서 $A \subseteq B$이고 $B \subseteq C$이므로

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow x \in B & \qquad (\because A \subseteq B) \\ \Rightarrow x \in C & \qquad (\because B \subseteq C) \end{aligned}$$

따라서 $x \in A \Rightarrow x \in C$이다. 그러므로, $A \subseteq C$이다. □

2.1 집합과 부분집합

정리 2

임의의 집합 A, B, C에 대하여 $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$이면 $A \subseteq C$.

증명

$A \subseteq C$와 동치명제인

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

임을 밝히면 충분하다. 가정에서 $A \subseteq B$이고 $B \subseteq C$이므로

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow x \in B \qquad & (\because A \subseteq B) \\ \Rightarrow x \in C \qquad & (\because B \subseteq C) \end{aligned}$$

따라서 $x \in A \Rightarrow x \in C$이다. 그러므로, $A \subseteq C$이다. □

연습문제 2.1

4, 5, 6 번 : 조별 제출. 4월 9일까지

2.2 집합의 규정

W 대학교 수학교육과 학생들의 집합 A에 대하여, 다음과 같은 집합을 생각할 수 있다:

$$\{x \in A \mid x\text{는 여학생이다}\}$$

$$\{x \in A \mid x\text{는 남학생이다}\}$$

2.2 집합의 규정

일반적으로 다음과 같이 집합을 나타낼 수 있다:

정의

집합 A의 임의의 원소 $x \in A$에 관한 명제함수 $p(x)$에 대하여 A의 원소로서 $p(x)$가 참인 것으로만 이루어진 집합을 아래와 같이 나타낸다.

$$\{x \in A \mid p(x)\}$$

이 표기를 집합의 조건제시법이라 한다.

2.2 집합의 규정

예제 1

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 다음 등식이 성립한다:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x + 1\} = \phi$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\} = \{-\frac{1}{2}, 3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \phi$

2.2 집합의 규정

예제 1

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 다음 등식이 성립한다:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x + 1\} = \phi$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\} = \{-\frac{1}{2}, 3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \phi$

예제 1

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 다음 등식이 성립한다:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x + 1\} = \phi$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\} = \{-\frac{1}{2}, 3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \phi$

2.2 집합의 규정

예제 1

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서의 다음 등식이 성립한다:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x + 1\} = \phi$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\} = \{-\frac{1}{2}, 3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \phi$

2.2 집합의 규정

표기

- $\mathbb{R} = \{x \mid x$는 실수이다$\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x$는 유리수이다$\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x$는 정수이다$\}$
- $\mathbb{N} = \{x \mid x$는 자연수이다$\}$
- $\mathrm{I} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \mathrm{x} \leq 1\}$
- $\mathbb{R}_{+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_{+} \subset \mathbb{R}$

표기

- $\mathbb{R} = \{x \mid x\text{는 실수이다}\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x\text{는 유리수이다}\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x\text{는 정수이다}\}$
- $\mathbb{N} = \{x \mid x\text{는 자연수이다}\}$
- $\mathrm{I} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \mathrm{x} \leq 1\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

2.2 집합의 규정

표기

- $\mathbb{R} = \{x \mid x\text{는 실수이다}\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x\text{는 유리수이다}\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x\text{는 정수이다}\}$
- $\mathbb{N} = \{x \mid x\text{는 자연수이다}\}$
- $\mathrm{I} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \mathrm{x} \leq 1\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

2.2 집합의 규정

표기

- $\mathbb{R} = \{x \mid x\text{는 실수이다}\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x\text{는 유리수이다}\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x\text{는 정수이다}\}$
- $\mathbb{N} = \{x \mid x\text{는 자연수이다}\}$
- $\mathrm{I} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \mathrm{x} \leq 1\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

2.2 집합의 규정

표기

- $\mathbb{R} = \{x \mid x$는 실수이다$\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x$는 유리수이다$\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x$는 정수이다$\}$
- $\mathbb{N} = \{x \mid x$는 자연수이다$\}$
- $\mathrm{I} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \mathrm{x} \leq 1\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

2.2 집합의 규정

표기

- $\mathbb{R} = \{x \mid x\text{는 실수이다}\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x\text{는 유리수이다}\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x\text{는 정수이다}\}$
- $\mathbb{N} = \{x \mid x\text{는 자연수이다}\}$
- $\mathrm{I} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \mathrm{x} \leq 1\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

2.2 집합의 규정

표기

- $\mathbb{R} = \{x \mid x\text{는 실수이다}\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x\text{는 유리수이다}\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x\text{는 정수이다}\}$
- $\mathbb{N} = \{x \mid x\text{는 자연수이다}\}$
- $\mathrm{I} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \mathrm{x} \leq 1\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

2.2 집합의 규정

표기

- $\mathbb{R} = \{x \mid x\text{는 실수이다}\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x\text{는 유리수이다}\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x\text{는 정수이다}\}$
- $\mathbb{N} = \{x \mid x\text{는 자연수이다}\}$
- $\mathrm{I} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \mathrm{x} \leq 1\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

정의

주어진 집합 A의 모든 부분집합이 원소인 집합을 A의 **멱집합**이라 하고 이것을 $\mathcal{P}(A)$와 같이 나타낸다.

예제 2

- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

2.2 집합의 규정

정의

주어진 집합 A의 모든 부분집합이 원소인 집합을 A의 **멱집합**이라 하고 이것을 $\mathcal{P}(A)$와 같이 나타낸다.

예제 2

- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

2.2 집합의 규정

정의

주어진 집합 A의 모든 부분집합이 원소인 집합을 A의 멱집합이라 하고 이것을 $\mathcal{P}(A)$와 같이 나타낸다.

예제 2

- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

정의

주어진 집합 A의 모든 부분집합이 원소인 집합을 A의 **멱집합**이라 하고 이것을 $\mathcal{P}(A)$와 같이 나타낸다.

예제 2

- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

정의

주어진 집합 A의 모든 부분집합이 원소인 집합을 A의 **멱집합**이라 하고 이것을 $\mathcal{P}(A)$와 같이 나타낸다.

예제 2

- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

정리 3

원소가 n 개인 집합 A의 멱집합 $\mathcal{P}(A)$의 원소의 수는 2^n와 같다.

증명

$A = \phi$인 경우, 분명히 참이다(Why?).

$A \neq \emptyset$인 경우, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$으로 놓자. 그러면 A의 각 부분집합에 원소 a_k가 속하는 경우와 속하지 않는 경우가 있다. 즉 A의 각 원소에 대하여 두 가지 가능성을 생각할 수 있고 이것은 A의 부분집합의 개수가 2^n임을 의미한다. □

정리 3

원소가 n 개인 집합 A의 멱집합 $\mathcal{P}(A)$의 원소의 수는 2^n와 같다.

증명

$A = \phi$인 경우, 분명히 참이다(Why?).

$A \neq \emptyset$인 경우, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$으로 놓자. 그러면 A의 각 부분집합에 원소 a_k가 속하는 경우와 속하지 않는 경우가 있다. 즉 A의 각 원소에 대하여 두 가지 가능성을 생각할 수 있고 이것은 A의 부분집합의 개수가 2^n임을 의미한다. $\square$

별증

원소의 수가 0인 부분집합의 수는 $C(n,0)=1$이고, 원소의 수가 1인 부분집합의 수는 $C(n,1)=n$이다. 일반적으로 원소의 수가 k개인 부분집합의 수는 $C(n,k)$이다. 따라서 A의 모든 부분집합의 수는

$$C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)$$

이다. 이항정리로부터

$$(1+1)^n = C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)$$

이 성립하므로 $\mathcal{P}(A)$의 원소의 수는 2^n과 같다. □

연습문제 2.2

3, 4, 5 번 : 조별 제출. 4월 9일까지

2.3 합집합과 교집합

정의 3

임의의 두 집합 A, B에 대하여 적어도 A, B 각각에 속하는 원소들의 집합을 A와 B의 **합집합**이라 하고 $A \cup B$로 나타낸다. 즉,

$$x \in A \cup B \quad \equiv \quad x \in A \vee x \in B.$$

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

2.3 합집합과 교집합

정의 3

임의의 두 집합 A, B에 대하여 적어도 A, B 각각에 속하는 원소들의 집합을 A와 B의 **합집합**이라 하고 $A \cup B$로 나타낸다. 즉,

$$x \in A \cup B \quad \equiv \quad x \in A \vee x \in B.$$

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

정의 4

임의의 두 집합 A, B에 대하여 A, B에 동시에 속하는 원소의 집합을 A와 B의 교집합이라 하고 $A \cap B$로 나타낸다. 즉,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

또는

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

예제 3

집합 $\mathbb{I}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$에 대하여 다음 등식을 얻는다:

(a) $\mathbb{I} \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$

(b) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{I} \cup \mathbb{I} = \mathbb{I}$, $\mathbb{I} \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}$

(d) $\mathbb{N} \cap \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0\} = \phi$

예제 3

집합 I, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$에 대하여 다음 등식을 얻는다:

(a) $\mathrm{I} \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$

(b) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

(c) $\mathrm{I} \cup \mathrm{I} = \mathrm{I}$, $\mathrm{I} \cap \mathrm{I} = \mathrm{I}$

(d) $\mathbb{N} \cap \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0\} = \phi$

예제 3

집합 I, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$에 대하여 다음 등식을 얻는다:

(a) $\mathrm{I} \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$

(b) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

(c) $\mathrm{I} \cup \mathrm{I} = \mathrm{I}$, $\mathrm{I} \cap \mathrm{I} = \mathrm{I}$

(d) $\mathbb{N} \cap \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0\} = \phi$

예제 3

집합 I, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$에 대하여 다음 등식을 얻는다:

(a) $\mathrm{I} \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$

(b) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

(c) $\mathrm{I} \cup \mathrm{I} = \mathrm{I}$, $\mathrm{I} \cap \mathrm{I} = \mathrm{I}$

(d) $\mathbb{N} \cap \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0\} = \phi$

예제 3

집합 I, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$에 대하여 다음 등식을 얻는다:

(a) $\mathrm{I} \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$

(b) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

(c) $\mathrm{I} \cup \mathrm{I} = \mathrm{I}$, $\mathrm{I} \cap \mathrm{I} = \mathrm{I}$

(d) $\mathbb{N} \cap \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0\} = \phi$

정리 4

집합 X의 부분집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다:

(a) 항등법칙 $A \cup \phi = A, \quad A \cap X = A$

(b) 멱등법칙 $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

(c) 교환법칙 $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(d) 결합법칙 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(e) 분배법칙 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

정리 4

집합 X의 부분집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다:

(a) 항등법칙 $A \cup \phi = A, \quad A \cap X = A$

(b) 멱등법칙 $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

(c) 교환법칙 $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(d) 결합법칙 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(e) 분배법칙 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

정리 4

집합 X의 부분집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다:

(a) 항등법칙 $A \cup \phi = A, \quad A \cap X = A$

(b) 멱등법칙 $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

(c) 교환법칙 $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(d) 결합법칙 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(e) 분배법칙 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.3 합집합과 교집합

정리 4

집합 X의 부분집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다:

(a) 항등법칙 $A \cup \phi = A, \quad A \cap X = A$

(b) 멱등법칙 $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

(c) 교환법칙 $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(d) 결합법칙 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(e) 분배법칙 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.3 합집합과 교집합

정리 4

집합 X의 부분집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다:

(a) 항등법칙 $A \cup \phi = A, \quad A \cap X = A$

(b) 멱등법칙 $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

(c) 교환법칙 $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(d) 결합법칙 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(e) 분배법칙 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

정리 4

집합 X의 부분집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다:

(a) 항등법칙 $A \cup \phi = A, \quad A \cap X = A$

(b) 멱등법칙 $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

(c) 교환법칙 $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(d) 결합법칙 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(e) 분배법칙 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

증명 없는 것은 스스로 해결(연습문제)

증명

(a)

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup \phi &\equiv x \in A \vee x \in \phi && (A \cup \phi\text{의 정의}) \\
&\equiv x \in A && (x \in \phi \equiv c, p \vee c \equiv p)
\end{aligned}
$$

그러므로 $A \cup \phi = A$이다.

(d)

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cup C) &\equiv x \in A \vee x \in B \cup C && (\cup\text{의 정의}) \\
&\equiv x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) && (\cup\text{의 정의}) \\
&\equiv (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C && (\text{결합법칙}) \\
&\equiv x \in A \cup B \ \vee \ x \in C && (\cup\text{의 정의}) \\
&\equiv x \in (A \cup B) \cup C && (\cup\text{의 정의})
\end{aligned}
$$

그러므로 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$이다.

(e)

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\equiv x \in A \wedge x \in B \cup C && (\cap\text{의 정의}) \\
&\equiv x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) && (\cup\text{의 정의}) \\
&\equiv (x \in A \wedge x \in B) && (\text{분배법칙}) \\
&\quad \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\equiv x \in A \cap B \vee x \in A \cap C && (\cap\text{의 정의}) \\
&\equiv x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) && (\cup\text{의 정의})
\end{aligned}
$$

그러므로 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$이다. □

연습문제 2.3

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 번 : 스스로 해결.

2.4 여집합

정의 5

집합 A, B에 대하여 A에 속하지만 B에는 속하지 않는 원소의 집합을 A에 대한 B의 차집합이라 하고 $A-B$로 나타낸다. 즉,

$$A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

예제 4

집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$에 대하여 다음을 구하여라.

$$A - B, \qquad A - (A \cap B)$$

풀이

$A - B = \{a, b, c, d\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$

$A - (A \cap B) = \{a, b, c, d\} - \{c, d\} = \{a, b\}$ □

2.4 여집합

예제 4

집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$에 대하여 다음을 구하여라.

$$A - B, \qquad A - (A \cap B)$$

풀이

$A - B = \{a, b, c, d\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$

$A - (A \cap B) = \{a, b, c, d\} - \{c, d\} = \{a, b\}$ $\square$

2.4 여집합

표기

- In this book, a universal set is denoted by U.
- We write A^c for $U - A$.

2.4 여집합

표기

- In this book, a universal set is denoted by U.
- We write A^c for $U - A$.

2.4 여집합

표기

- In this book, a universal set is denoted by U.
- We write A^c for $U - A$.

여러분의 미래를 위해 이 부분은 일부 영어로!!!

예제 5

Show that $A - B = A \cap B^c$.

Proof

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap B^c &\equiv x \in A \wedge x \in U - B && (\cap, {}^c \text{ 의 정의}) \\
&\equiv x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin B) && (- \text{의 정의}) \\
&\equiv (x \in A \wedge x \in U) \wedge x \notin B && \text{결합법칙)} \\
&\equiv x \in A \cap U \wedge x \notin B && (\cap \text{의 정의}) \\
&\equiv x \in A \wedge x \notin B && (A \cap U = A) \\
&\equiv x \in A - B && (- \text{의 정의})
\end{aligned}
$$

그러므로 $A - B = A \cap B^c$이다. □

여러분의 미래를 위해 이 부분은 일부 영어로!!!

예제 5

Show that $A - B = A \cap B^c$.

Proof

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap B^c &\equiv x \in A \wedge x \in U - B && (\cap, {}^c \text{의 정의}) \\
&\equiv x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin B) && (-\text{의 정의}) \\
&\equiv (x \in A \wedge x \in U) \wedge x \notin B && \text{결합법칙}) \\
&\equiv x \in A \cap U \wedge x \notin B && (\cap\text{의 정의}) \\
&\equiv x \in A \wedge x \notin B && (A \cap U = A) \\
&\equiv x \in A - B && (-\text{의 정의})
\end{aligned}
$$

그러므로 $A - B = A \cap B^c$이다. □

정리 5

임의의 집합 A, B에 대하여

(a) $(A^c)^c = A$

(b) $\phi^c = U$, $U^c = \phi$

(c) $A \cap A^c = \phi$, $A \cup A^c = U$

(d) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

정리 5

임의의 집합 A, B에 대하여

(a) $(A^c)^c = A$

(b) $\phi^c = U$, $U^c = \phi$

(c) $A \cap A^c = \phi$, $A \cup A^c = U$

(d) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

정리 5

임의의 집합 A, B에 대하여

(a) $(A^c)^c = A$

(b) $\phi^c = U$, $U^c = \phi$

(c) $A \cap A^c = \phi$, $A \cup A^c = U$

(d) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

정리 5

임의의 집합 A, B에 대하여

(a) $(A^c)^c = A$

(b) $\phi^c = U$, $U^c = \phi$

(c) $A \cap A^c = \phi$, $A \cup A^c = U$

(d) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

정리 5

임의의 집합 A, B에 대하여

(a) $(A^c)^c = A$

(b) $\phi^c = U$, $U^c = \phi$

(c) $A \cap A^c = \phi$, $A \cup A^c = U$

(d) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

증명

(a), (b), (c)는 연습문제

(d)

$$
\begin{aligned}
A \subseteq B &\equiv (x \in A \Rightarrow x \in B) && (\subseteq \text{의 정의}) \\
&\equiv (x \notin B \Rightarrow x \notin A) && (\text{대우법칙}) \\
&\equiv (x \in B^c \Rightarrow x \in A^c) && ({}^c\text{의 정의}) \\
&\equiv B^c \subseteq A^c && (\subseteq \text{의 정의})
\end{aligned}
$$

그러므로 $A \subseteq B \equiv B^c \subseteq A^c$이다. □

정리 6 (드 모르간의 정리)

임의의 두 집합 A, B에 대하여

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

정리 6 (드 모르간의 정리)

임의의 두 집합 A, B에 대하여

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

정리 6 (드 모르간의 정리)

임의의 두 집합 A, B에 대하여

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

교재 오타 있으니 주의!!

증명

(a)

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\equiv \sim (x \in A \cup B) && ({}^c\text{의 정의}) \\
&\equiv \sim (x \in A \vee x \in B) && (\cup\text{의 정의}) \\
&\equiv \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) && (\text{논리에 관한 드 모르간의 법칙}) \\
&\equiv x \in A^c \wedge x \in B^c && ({}^c\text{의 정의}) \\
&\equiv x \in A^c \cap B^c && (\cap\text{의 정의})
\end{aligned}
$$

그러므로 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$이다. □

예제 6

임의의 집합 A, B, C에 대한 다음 등식

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

을 증명하여라.

논리연산이 아닌 집합연산과 관련된 정리들을 이용하여 증명.

증명

$(A\cap B)-(A\cap C)$	$=(A\cap B)\cap(A\cap C)^c$	예제 5
	$=(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)$	정리 6(b)
	$=(A\cap B\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C^c)$	분배법칙
	$=(A\cap A^c\cap B)\cup(A\cap B\cap C^c)$	교환법칙
	$=(\phi\cap B)\cup(A\cap B\cap C^c)$	정리 5(c)
	$=\phi\cup[A\cap(B\cap C^c)]$	$\phi\cap B=\phi$
	$=A\cap[(B\cap C^c)]$	정리 4(a)
	$=A\cap(B-C)$	예제 5

그러므로 $(A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B-C)$ =에 관한 추이율

연습문제 2.4

2, 3, 5, 9 번 : 스스로 해결.