

제5장 각 변조

정보 신호를 실어 나르는 반송파로는 일반적으로 $A\cos(2\pi f_c t + \phi)$ 와 같이 표현되는 정현파 신호가 사용되는데, 진폭 A , 주파수 f_c , 위상 ϕ 의 세 가지 파라미터가 있다. 변조 과정은 메시지에 따라 반송파의 파라미터를 변화시키는 과정이라 할 수 있다. 변조된 신호는 $s_m(t) = A(t)\cos\theta(t)$ 또는 $s_m(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi(t))$ 와 같이 표현된다. 앞 장에서 살펴 본 진폭 변조는 정보 신호 $m(t)$ 에 의해 반송파의 크기를 변화시키는 변조 방식이다. 즉 변조된 반송파의 진폭에 정보가 담겨 있다. 이 장에서는 반송파의 각 $\theta(t)$ 에 정보를 실어 보내는 변조 방식에 대해 알아 보기로 한다. 이 변조 방식을 각 변조라 하는데, 반송파의 진폭은 일정하게 하고 정보 신호에 따라 반송파의 각이 변화하도록 한다. 반송파의 각은 $\theta(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)$ 와 같이 주파수와 위상으로 나타낼 수 있어서, 각 변조는 다시 주파수 변조(FM)와 위상 변조(PM)로 나뉘어진다. 즉 주파수 변조는 메시지에 따라 반송파의 주파수를 변화시키는 변조방식이고, 위상 변조는 메시지에 따라 반송파의 위상을 변화시키는 변조방식이다.

5.1 순시 주파수

순수 정현파 신호는 $A\cos(2\pi f_c t + \phi)$ 와 같이 표현되어 고정된 주파수를 갖는 신호이다. 한편 각 변조의 하나인 주파수 변조에서는 정보 신호에 따라 반송파의 주파수를 변화시키는 방식이다. 그러므로 시간에 따라 변화하는 주파수를 갖는 신호는 순수 정현파 신호의 개념으로는 설명하기 곤란하다. 따라서 먼저 정현파 신호의 개념을 주파수가 시간에 따라 변화할 수 있는 일반화된 함수로 확장하고, 순시 주파수의 개념을 정의할 필요가 있다.

그림 5.1에 복소 평면에서 반지름이 A 인 원주 위의 한 점을 값으로 갖는 복소 지수 함수 $Ae^{j\theta(t)}$ 을 보인다. 이 함수는 크기가 상수 A 이고 시간에 따라 변하는 각 $\theta(t)$ 를 가진다. 이 지수 함수의 실수부는 다음과 같다.

$$x(t) = \text{Re}\{Ae^{j\theta(t)}\} = A\cos\theta(t) \quad (5.1)$$

만일 원주 위의 일정한 속도로 회전한다면 각도는 시간에 비례하며, 따라서 다음과 같이 표현된다.

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \quad (5.2)$$

이 경우 각도와 시간의 선형 관계를 그림 5.2(a)에 보인다. 여기서 기울기(비례상수) ω_0 는 각속도이며 θ_0 는 $t=0$ 에서의 초기 각도이다. 이것은 등속도의 직선 운동에서 변위(거리)가 $d(t) = v_0 t + d_0$ 와 같이 표현되는 것과 유사하다. 식 (5.2)로부터

$$\omega_0 = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (5.3)$$

가 되는 것을 알 수 있다. 등속도로 회전하는 지수함수의 실수부는 다음과 같은 일상적인 정

현과가 된다.

$$x(t) = \text{Re}\{Ae^{j\theta(t)}\} = A \cos \theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad (5.4)$$

따라서 주기는 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 이 되며, 주파수는 역수인 $f_0 = 1/T_0 = \omega_0/2\pi$ 가 된다. 그러므로 주파수는

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (5.5)$$

와 같이 표현할 수 있다.

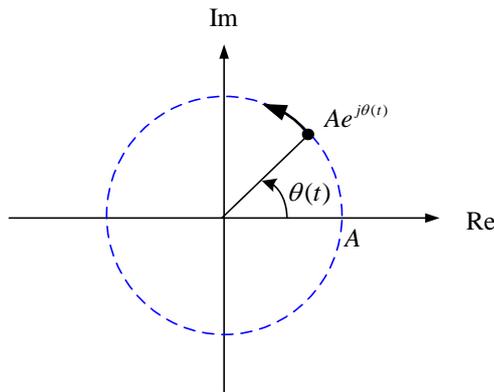
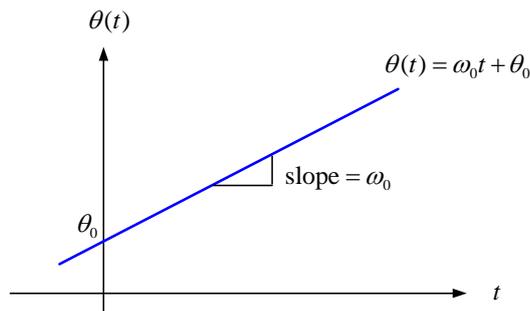


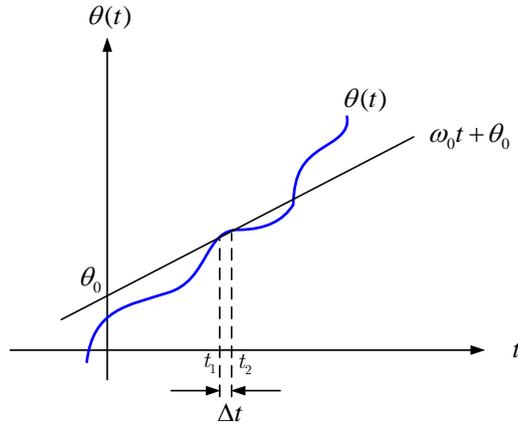
그림 5.1 복소 지수 함수

이번에는 일정하지 않은 속도로 회전하는 경우를 생각하자. 그림 5.2(b)에 각이 시간에 따라 변화하는 경우를 보인다. 여기서 작은 시구간 (t_1, t_2) 동안 곡선은 기울기가 ω_0 이고 절편이 θ_0 인 직선으로 근사화할 수 있다. 즉 $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$ 로 근사화된다. 따라서 이 작은 시구간 $\Delta t = t_2 - t_1$ 동안은 원주상의 각 변화는 등속도 운동으로 근사화되며 각속도는 ω_0 가 된다. 그러므로 이 구간에서의 주파수는 식 (5.5)와 같이 표현된다. 이러한 개념을 일반화시켜서 특정 시간 t 에서의 기울기를 **순시 주파수(instantaneous frequency)**로 정의한다. 즉 순시 주파수와 각도는 미분, 적분의 관계로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} \quad [\text{Hz}] \quad \text{또는} \quad \omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad [\text{rad/sec}] \\ \theta(t) &= \int_{-\infty}^t 2\pi f_i(\tau) d\tau = \int_0^t 2\pi f_i(\tau) d\tau + \theta_0 \end{aligned} \quad (5.6)$$



(a) 속도가 일정한 경우



(b) 속도가 일정하지 않은 경우

그림 5.2 순시 주파수의 개념

5.2 각 변조

각 변조는 정보 신호 $m(t)$ 에 의하여 반송파의 각을 변화시키는 변조 방식으로 각 변조에는 두 가지 방식이 있다. 한 가지는 $m(t)$ 가 $\theta(t)$ 를 다음과 같이 선형적으로 변화시키는 방법이다.

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \theta_0 + D_p m(t) \quad (5.7)$$

여기서 D_p 는 비례상수이고 f_c 는 반송파 주파수이다. 이와 같은 변조 방식을 **위상 변조 (Phase Modulation: PM)**라 한다. $\theta_0 = 0$ 으로 가정해도 일반성을 잃지 않으므로 PM 변조된 반송파의 각은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\theta(t) = 2\pi(f_c t + k_p m(t)) \quad (5.8)$$

여기서 $k_p = D_p / 2\pi$ 는 상수이다. 따라서 PM 변조된 신호는 다음과 같이 표현된다.

$$s_{PM}(t) = A \cos \theta(t) = A \cos[2\pi(f_c t + k_p m(t))] \quad (5.9)$$

PM 변조된 신호의 순시 주파수는 다음과 같다.

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + k_p \frac{dm(t)}{dt} \quad (5.10)$$

따라서 PM 변조된 신호의 순시 주파수는 정보 신호의 미분값에 따라 선형적으로 변화한다.

각 변조의 다른 방식은 순시 주파수를 정보 신호에 따라 선형적으로 변화시키는 방식이다. 즉

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) \quad (5.11)$$

여기서 k_f 는 비례상수이다. 이러한 변조 방식을 **주파수 변조(Frequency Modulation: FM)**라

한다. 따라서 FM 변조된 반송파의 각은

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t 2\pi(f_c + k_f m(\tau))d\tau = 2\pi(f_c t + k_f \int_0^t m(\tau)d\tau) + \theta_0 \quad (5.12)$$

와 같이 된다. 역시 $\theta_0 = 0$ 으로 가정해도 일반성을 잃지 않으므로 FM 변조된 신호는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$s_{FM}(t) = A \cos \theta(t) = A \cos[2\pi(f_c t + k_f \int_0^t m(\tau)d\tau)] \quad (5.13)$$

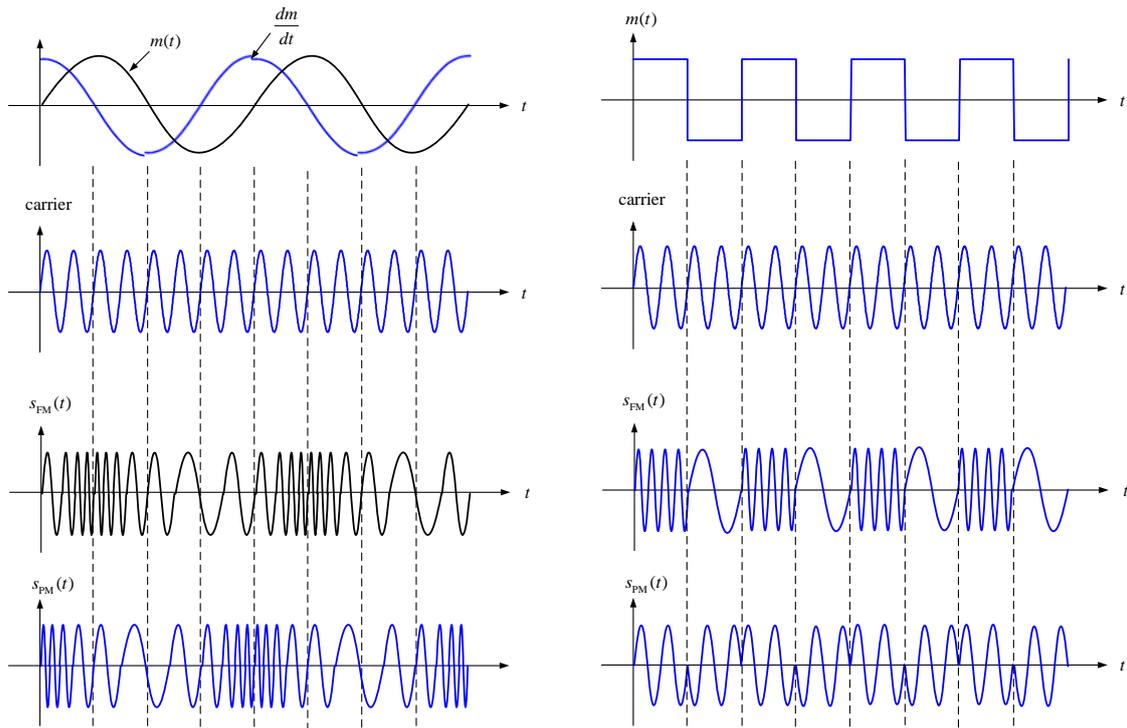
이상을 요약하면 표 5.1과 같으며, FM이나 PM 모두 식 (5.14)와 같이 표현할 수 있다.

$s_m(t) = A \cos \theta(t) = A \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$ <p>PM의 경우 $\phi(t) = 2\pi k_p m(t)$</p> <p>FM의 경우 $\phi(t) = 2\pi k_f g(t)$</p> <p style="text-align: center;">여기서 $g(t) \triangleq \int_0^t m(\tau)d\tau$</p>	(5.14)
--	--------

표 5.1 각 변조의 두 가지 방식

변조 방식	FM	PM
순시 주파수 $f_i(t)$	$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$	$f_i(t) = f_c + k_p \frac{dm(t)}{dt}$
각 $\theta(t)$	$\theta(t) = 2\pi \left[f_c t + k_f \int_0^t m(\tau)d\tau \right]$	$\theta(t) = 2\pi \left[f_c t + k_p m(t) \right]$

그림 5.3에는 FM 변조된 신호와 PM 변조된 신호의 예를 보인다. 그림 5.3(a)와 같이 정보 신호가 정현파인 경우, 정보 신호를 미분해도 신호는 같은 모양을 가지므로 FM 변조된 신호나 PM 변조된 신호가 같은 모양을 가져서 구별이 되지 않는다는 것을 알 수 있다. 그림 5.3(b)와 같이 정보 신호가 구형파인 경우 FM 변조된 신호는 두 개의 순시 주파수를 가진 신호가 된다. 정보 신호가 양인 구간에서는 FM 신호의 순시 주파수가 반송파 주파수보다 커지고, 정보 신호가 음인 구간에서는 FM 신호의 순시 주파수가 반송파 주파수보다 작아진다. 그러나 PM 변조된 신호는 주파수가 일정하고 위상만 변화한다. 구형파 같은 불연속 신호는 불연속점에서 미분 불가능하다. 따라서 이 불연속점에서 dm/dt 는 임펄스를 포함하게 된다. 이것은 불연속점에서 순시 주파수가 무한대가 된다는 것을 의미하며, 위상이 순간적으로 변화하게 된다.



(a) 정현파 신호

(b) 구형파 신호

그림 5.3 FM 및 PM 변조된 신호의 예

[예제 5.1] 그림 5.4의 신호에 대하여 FM 변조된 신호와 PM 변조된 신호를 그려라. 변조된 신호에 대하여 순시 주파수를 구하라. 반송파 주파수는 $f_c = 100 \text{ MHz}$ 이고, $k_f = 10^6$, $k_p = 25$ 라고 가정한다.

[풀이]

(a) FM 변조

FM 변조된 신호의 순시 주파수는 식 (5.11)로부터

$$\begin{aligned}
 f_i(t) &= f_c + k_f m(t) \\
 &= 10^8 + 10^6 m(t)
 \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $m(t)$ 의 최소값과 최대값은 -1 과 $+1$ 이므로 순시 주파수의 최소값과 최대값은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 (f_i)_{\min} &= 10^8 + 10^6 \cdot \min[m(t)] = 99 \text{ MHz} \\
 (f_i)_{\max} &= 10^8 + 10^6 \cdot \max[m(t)] = 101 \text{ MHz}
 \end{aligned}$$

정보 신호 $m(t)$ 는 -1 과 $+1$ 사이를 선형적으로 증가했다 감소했다 하기 때문에 FM 변조된 신호의 순시 주파수는 99 MHz 와 101 MHz 사이를 증가했다 감소했다를 반복한다.

(b) PM 변조

PM 변조된 신호의 순시 주파수는 식 (5.10)으로부터

$$\begin{aligned}
 f_i(t) &= f_c + k_p \frac{dm(t)}{dt} \\
 &= 10^8 + 25 \frac{dm(t)}{dt}
 \end{aligned}$$

신호 $m(t)$ 는 선형적으로 증가했다 감소했다 하므로 PM 변조된 신호는 두 개의 순시 주파수를 갖는다. $m(t)$ 가 증가하는 구간에서는 기울기가 2×10^4 이고, $m(t)$ 가 감소하는 구간에서는 기울기가 -2×10^4 이므로 PM 변조된 신호의 순시 주파수는 다음과 같이 된다.

$$(f_i)_{\min} = 10^8 + 25 \cdot \min \left[\frac{dm(t)}{dt} \right] = 99.5 \text{ MHz}$$

$$(f_i)_{\max} = 10^8 + 25 \cdot \max \left[\frac{dm(t)}{dt} \right] = 100.5 \text{ MHz}$$

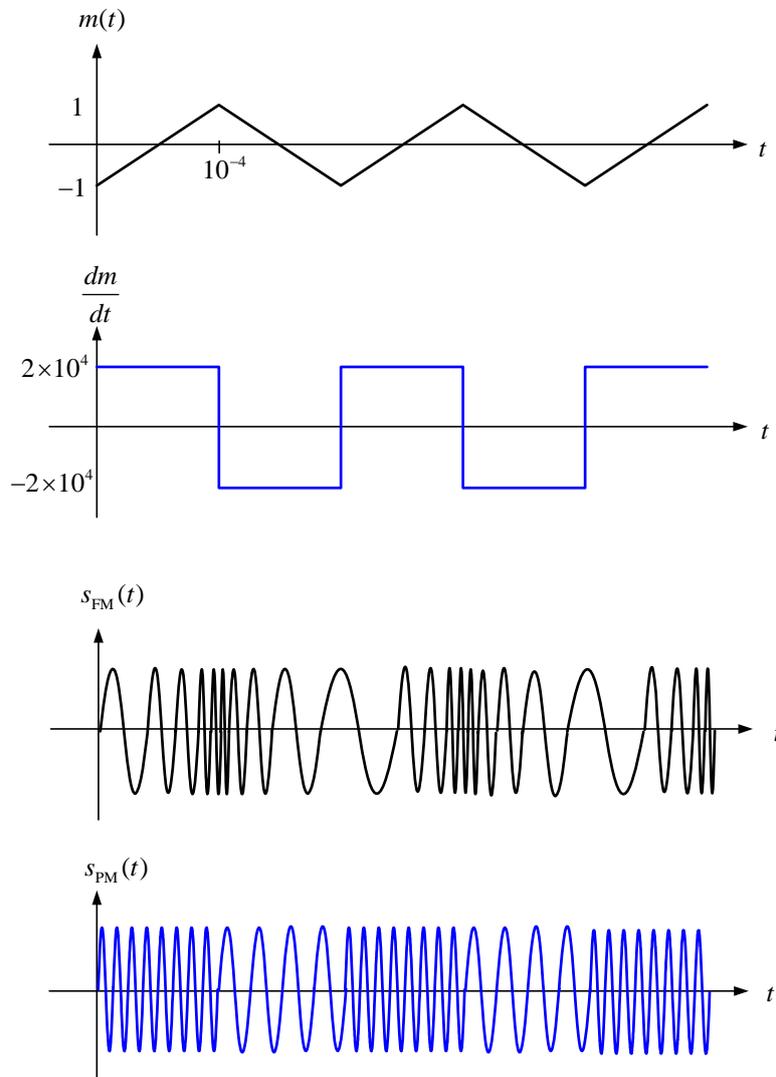


그림 5.4 예제 5.1의 신호와 각 변조된 파형

각 변조된 신호의 특성

각 변조된 신호의 전력에 대해 알아 보자. 진폭 변조에서는 정보 신호에 따라 변조된 신호의 크기가 변화하므로 신호의 전력은 정보 신호와 관계가 있다. 그러나 각 변조에서는 반송파의 진폭이 변화하지 않고 주파수와 위상만 변화한다. 따라서 각 변조된 신호의 전력은 정보 신호와 관계되지 않는다. 반송파의 진폭이 A 인 경우 FM 신호나 PM 신호의 전력은 모두 $A^2/2$ 가 되며, k_f 나 k_p 와는 관계되지 않는다는 것을 알 수 있다.

FM 변조에서 정보 신호의 크기에 따라 순시 주파수가 반송 주파수로부터 벗어나는 정도를 **주파수 편이(frequency deviation)**라 한다. 식 (5.11)로부터 주파수 편이는

$$f_d(t) \triangleq f_i(t) - f_c = k_f m(t) \quad (5.15)$$

와 같이 표현된다. 최대 주파수 편이 Δf 를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\Delta f = \max |f_d(t)| = k_f \max |m(t)| \quad (5.16)$$

같은 방법으로 PM 변조에서 **위상 편이(phase deviation)**는

$$\theta_d(t) \triangleq \theta(t) - 2\pi f_c t = 2\pi k_p m(t) \quad (5.17)$$

로 정의하며, 최대 위상편이는

$$\Delta \theta = \max |\theta_d(t)| = 2\pi k_p \max |m(t)| \quad (5.18)$$

로 정의한다.

이상에서 살펴본 바와 같이 FM 변조된 신호의 순시 주파수가 가질 수 있는 범위는 정보 신호의 크기와 주파수 민감도 k_f 에 의해 결정된다. 주파수 민감도 k_f 를 작게 하면 순시 주파수의 범위가 작아지며, 그 결과 FM 신호의 대역폭도 작아진다. 이렇게 작은 값의 k_f 를 사용한 변조 방식을 협대역 FM이라 하고, 큰 값의 k_f 를 사용한 변조 방식을 광대역 FM이라 한다. 그러나 아무리 k_f 를 작게 선택하더라도 FM 신호의 대역폭을 진폭 변조의 대역폭보다 작게 할 수 없다.

5.3 각 변조된 신호의 대역폭

FM 변조된 신호의 순시 주파수는 최저 $f_c + k_f \min\{m(t)\}$ 에서 최고 $f_c + k_f \max\{m(t)\}$ 까지 변화할 수 있다. 따라서 순시 주파수의 변화폭은 최대 주파수 편이의 두 배, 즉 $2\Delta f = 2k_f \max |m(t)|$ 가 된다($m(t)$ 의 최대값과 최소값은 크기가 동일하고 부호만 반대라고 가정한다). FM 신호의 스펙트럼이 순시 주파수의 범위 내에 존재하고, 따라서 FM 신호의 대역폭이 $2\Delta f$ 라고 생각하기 쉽다. 그리고 k_f 만 매우 작게 하면 FM 신호의 순시 주파수는 거의 반송파 주파수 f_c 근처에만 분포하게 되어 대역폭이 매우 작을 것으로 생각될 수 있다. 그러나 이러한 생각은 잘못된 것이다. 그 이유가 무엇인지 살펴 보자. FM 신호의 스펙트럼을 알기 위해서는 신호의 푸리에 변환을 구하는데, 푸리에 변환의 연산에서는 시공간 $-\infty < t < \infty$ 에서 계산을 해야 한다. 그러나 순시 주파수의 개념에서는 시간 구간을 고려하

지 않는다. 즉 어느 순간에서의 값이지 어느 구간 동안 평균된 값이 아니다. 예를 들어 정보 신호가 구형파인 경우 PM 변조된 신호의 순시 주파수는 f_c 이다(불연속점 제외). 그러나 구형파의 푸리에 변환은 sinc 함수이며 대역폭은 구형파의 펄스 폭에 반비례한다. 따라서 구형파를 각 변조한 신호는 f_c 뿐만 아니라 여러 주파수 성분을 가지며, 주파수 성분의 크기는 펄스 폭과도 관계가 있게 된다. 이제 각 변조된 신호의 스펙트럼은 수식으로 유도할 수 있는지, 그리고 대역폭은 계산할 수 있는지, 대역폭은 k_f 또는 k_p 와 어떻게 관련되는지 등에 관하여 알아 보고자 한다.

진폭 변조나 주파수 편이가 작은 협대역 각 변조에서는 변조된 신호와 정보 신호 사이에 선형성이 성립하여 기저대역으로부터 전송대역을 바로 연관시킬 수 있으며, 따라서 기저대역 신호의 특성으로부터 변조된 신호의 스펙트럼 특성이나 대역폭을 유추할 수 있다. 그러나 주파수 편이나 위상 편이가 커지면 변조된 신호와 기저대역 신호 사이에 더 이상 선형 관계가 성립하지 않는다. 이와 같이 k_f 가 커서 $|k_f g(t)| \ll 1$ 이 성립하지 않는 FM 변조를 **광대역 FM(Wide-Band FM: WBFM)**이라 하며, k_p 가 커서 $|k_p m(t)| \ll 1$ 이 성립하지 않는 PM 변조를 **광대역 PM(Wide-Band PM: WBPM)**이라 한다. 광대역 각 변조된 신호는 $m(t)$ 에 대해 선형적이지 않으므로 분석이 매우 복잡해서 변조된 신호의 스펙트럼은 정량적인 해석이 거의 불가능하다.

광대역 FM 신호의 특성을 살펴 보는데 있어 수식 전개 of 편이성을 위하여 변조된 신호를 복소 지수함수를 이용하여 다음과 같이 표현해 보자.

$$\begin{aligned} s_{\text{FM}}(t) &= A \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f g(t)] \\ &= \text{Re} \left\{ A e^{j[2\pi f_c t + 2\pi k_f g(t)]} \right\} = \text{Re} \left\{ A e^{j2\pi f_c t} \cdot e^{j2\pi k_f g(t)} \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

여기서 $g(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau$ 이다. 만일 위의 식에서 $e^{j2\pi k_f g(t)}$ 의 푸리에 변환을 안다면

$\mathcal{F} \left\{ A e^{j2\pi f_c t} \cdot e^{j2\pi k_f g(t)} \right\}$ 는 푸리에 변환의 성질(modulation)에 의해 쉽게 표현할 수 있으므로

FM 변조된 신호의 스펙트럼을 알 수 있다. 그러나 문제는 $\mathcal{F} \left\{ e^{j2\pi k_f g(t)} \right\}$ 를 간결한 형태의

수식으로 표현할 수 없다는 것이다. 그대신 $e^{j2\pi k_f g(t)}$ 를 무한 급수로 다음과 같이 표현해 보자.

$$e^{j2\pi k_f g(t)} = 1 + j2\pi k_f g(t) + \frac{(j2\pi k_f g(t))^2}{2!} + \dots + \frac{(j2\pi k_f g(t))^n}{n!} + \dots \quad (5.20)$$

그러면 FM 신호는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} s_{\text{FM}}(t) &= \text{Re} \left\{ A e^{j2\pi f_c t} \cdot e^{j2\pi k_f g(t)} \right\} \\ &= A \cdot \text{Re} \left\{ e^{j2\pi k_f g(t)} (\cos 2\pi f_c t + j \sin 2\pi f_c t) \right\} \\ &= A \left[\cos 2\pi f_c t - 2\pi k_f g(t) \sin 2\pi f_c t - \frac{(2\pi k_f)^2 g^2(t)}{2!} \cos 2\pi f_c t + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

따라서 FM 변조된 신호는 반송파 신호에 여러 형태로 변형된 신호들이 진폭 변조된 신호들의 합으로 표현된다. 여기서 $g(t)$ 는 $m(t)$ 를 적분한 것이므로 대역폭이 $m(t)$ 의 대역폭과 동

일하게 B 가 된다. 그러나 식 (5.21)에 있는 $g^2(t)$ 성분은 푸리에 변환의 곱셈/컨볼루션 성질에 의해 대역폭이 $2B$ 가 된다. 마찬가지로 $g^n(t)$ 성분의 대역폭은 nB 가 된다. 그러므로 FM 변조된 신호는 $\{g^n(t), n = 1, 2, \dots\}$ 성분들을 f_c 의 주파수대로 천이시킨 형태가 되므로 대역폭이 이론적으로 무한대가 된다. 다시 말해서 기저대역 신호의 대역폭이 제한되어 있더라도 FM 변조된 신호는 대역 제한되지 않는다. 그러나 $g^n(t)$ 성분의 계수가 n 의 증가에 따라 무시할 정도로 된다면, FM 신호에서 무시할 수 없을 정도의 스펙트럼 크기를 가진 성분은 특정 범위 내에 있을 수 있다. 실용적으로 신호의 대역폭을 정의할 때 최대 주파수 성분이 아니라 대부분의 신호 전력이 어느 주파수 범위에 있는가로 정의하기 때문에 FM 신호의 대역폭은 실제로는 유한하다. 어느 주파수 범위에 대부분의 신호 전력이 존재하는가는 변조 파라미터인 k_f 와 기저대역 신호의 크기와 관계가 있으며, 대역폭을 산출하는 데는 복잡한 분석이 요구된다.

이와 같이 광대역 각 변조된 신호는 $m(t)$ 에 대해 선형적이지 않으므로 분석이 매우 복잡해서 변조된 신호의 스펙트럼은 정량적인 해석이 거의 불가능하다. 따라서 기저대역 신호가 단일 정현파인 경우에 대해 해석한 다음 이 결과를 토대로 일반적인 경우로 확대 유추하는 방법을 이용하기로 한다.

정보 신호 $m(t)$ 가 순수한 단일 정현파라 가정하자. 즉,

$$m(t) = a \cos 2\pi f_m t$$

라 하자. 그러면

$$g(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau = \frac{a}{2\pi f_m} \sin 2\pi f_m t$$

가 된다. 이제 다음과 같이 주파수 편이비를 정의하자.

$$\beta \triangleq \frac{\Delta f}{B} \quad (5.22)$$

여기서 Δf 는 FM 신호의 최대 주파수 편이이며 B 는 $m(t)$ 의 대역폭이다. 주파수 편이비 β 를 **FM 변조지수(modulation index)**라 한다. 순수 정현파의 경우 $B = f_m$ 이 되며, $\Delta f = k_f \max|m(t)| = a k_f$ 가 된다. 그러면 FM 신호는

$$s_{\text{FM}}(t) = A \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f g(t)] = A \cos[2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t] \quad (5.23)$$

와 같이 표현된다. 위의 식을 복소 지수함수를 사용하여 표현하면

$$s_{\text{FM}}(t) = \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t} \cdot e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} \right\} \quad (5.24)$$

와 같이 된다. 여기서 $\exp(j\beta \sin 2\pi f_m t)$ 는 주기가 $1/f_m$ 인 주기함수이므로 다음과 같이 푸리에 급수로 전개할 수 있다.

$$e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_m t} \quad (5.25)$$

$$c_n = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} \cdot e^{-j2\pi n f_m t} dt$$

위의 식에서 $2\pi f_m t = x$ 로 치환하면 푸리에 계수는

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx \quad (5.26)$$

와 같이 표현된다. 위의 적분은 n 과 β 의 함수이므로 $J_n(\beta)$ 로 표현하며 제 1종 n 차 베셀 (Bessel) 함수라 부른다. 베셀 함수는 많은 물리적인 문제에서 자주 등장하는 함수로 n 과 β 의 값에 따라 계산되어 표로 주어져 있다. 베셀 함수는 실수 값을 가진다(증명해 보라). 표 5.2에 몇 가지의 n 과 β 에 대한 베셀 함수의 값을 소수점 두 자리로 표현하여 보인다. 그림 5.5에 베셀 함수의 값을 그래프로 보이고 있다.

표 5.2 Bessel 함수표

$\beta:$	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n											
0	0.9385	0.7652	0.2239	-0.2601	-0.3971	-0.1776	0.1506	0.3001	0.1717	-0.09033	-0.2459
1	0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	-0.06604	-0.3276	-0.2767	-0.004683	0.2346	0.2453	0.04347
2	0.03060	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	0.04657	-0.2429	-0.3014	-0.1130	0.1448	0.2546
3	0.002564	0.01956	0.1289	0.3091	0.4302	0.3648	0.1148	-0.1676	-0.2911	-0.1809	0.05838
4		0.002477	0.03400	0.1320	0.2811	0.3912	0.3576	0.1578	-0.1054	-0.2655	-0.2196
5			0.007040	0.04303	0.1321	0.2611	0.3621	0.3479	0.1858	-0.05504	-0.2341
6			0.001202	0.01139	0.04909	0.1310	0.2458	0.3392	0.3376	0.2043	-0.01446
7				0.002547	0.01518	0.05338	0.1296	0.2336	0.3206	0.3275	0.2167
8					0.004029	0.01841	0.05653	0.1280	0.2235	0.3051	0.3179
9						0.005520	0.02117	0.05892	0.1263	0.2149	0.2919
10						0.001468	0.006964	0.02354	0.06077	0.1247	0.2075
11							0.002048	0.008335	0.02560	0.06222	0.1231
12								0.002656	0.009624	0.02739	0.06337
13									0.003275	0.01083	0.02897
14									0.001019	0.003895	0.01196
15										0.001286	0.004508
16											0.001567

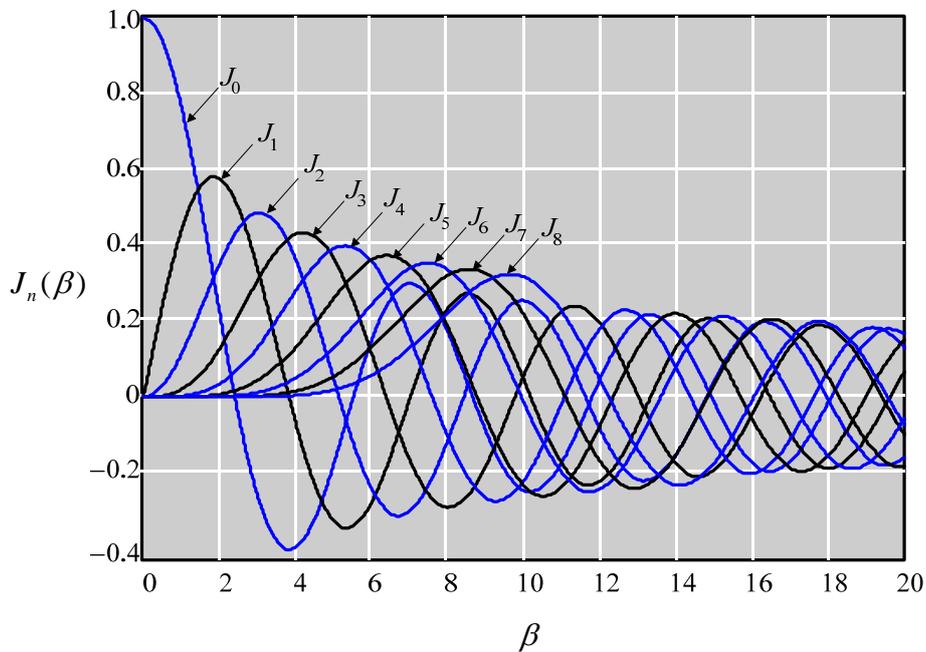


그림 5.5 다양한 n 과 β 의 함수로 나타낸 Bessel 함수의 값

지금까지 알아본 것을 정리하면 다음과 같다. 식 (5.24)에 포함된 신호 성분 $\exp(j\beta \sin 2\pi f_m t)$ 는 기본 주파수가 f_m 인 주기 신호로 푸리에 계수는 $c_n = J_n(\beta)$ 로 베셀 함수

가 된다. FM 신호의 대역폭을 알기 위해서는 베셀 함수 $J_n(\beta)$ 의 성질을 알아야 한다. 이상의 결과로부터 식 (5.25)는

$$e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t} \quad (5.27)$$

와 같이 표현되므로 FM 신호는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_{\text{FM}}(t) &= \text{Re} \left\{ e^{j2\pi f_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t} \right\} \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos 2\pi(f_c + n f_m)t \end{aligned} \quad (5.28)$$

위의 식으로부터 FM 변조된 신호는 반송파 성분과 $f_c \pm f_m, f_c \pm 2f_m, \dots, f_c \pm n f_m, \dots$ 등 무한대의 측파대 스펙트럼을 가진다는 것을 알 수 있다. 주파수 $f_c \pm n f_m$ 에 위치한 주파수 성분의 크기는 $J_n(\beta)$ 가 된다. 기저대역 신호 $m(t)$ 가 단일 정현파인 경우, AM 변조하면 반송파 주파수를 중심으로 두 개의 측파대만 있지만(따라서 대역폭은 $2B = 2f_m$ 이 됨), FM 변조하면 반송파 주파수를 중심으로 하여 고조파들이 무한대로 펼쳐진다. 따라서 $J_n(\beta)$ 가 0이 아닌 한 절대적 대역폭은 무한대가 된다. 그러나 FM 신호의 실용적인 대역폭은 유한하게 되는데 그 이유를 살펴 보자.

표 5.2와 그림 5.8에 보인 바와 같이 주어진 β 에 대해서 $J_n(\beta)$ 는 n 이 커질수록 크기가 작아진다. 따라서 n 이 충분히 크면 $J_n(\beta)$ 는 무시할 수 있을 정도가 되어 유한한 개수의 측파대 신호만이 의미를 가지게 된다. 보통 FM 신호의 대역폭은 전체 전력의 98%를 차지하는 측파대 범위로 보고 있는데, 표 5.2에서 보듯이 $n > \beta + 1$ 이면 $J_n(\beta)$ 는 크기가 매우 작아진다. 따라서 의미가 있는 측파대 신호의 개수를 $\beta + 1$ 로 잡는다. 그러면 FM 신호의 근사적인 대역폭은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} BW_{\text{FM}} &\approx 2n f_m = 2(\beta + 1)f_m \\ &= 2(\Delta f + f_m) \\ &= 2(a k_f + f_m) \end{aligned} \quad (5.29)$$

지금까지 살펴본 것은 정보 신호가 단일 정현파인 경우에 대한 FM 신호의 대역폭이지만 일반적인 신호에 대해서도 f_m 대신 기저대역 신호의 대역폭 B 를 사용하여 대역폭을 예측하는데 사용된다. 즉,

$$\begin{aligned} BW_{\text{FM}} &\approx 2(\beta + 1)B \\ &= 2(\Delta f + B) \end{aligned} \quad (5.30)$$

와 같이 FM 신호의 대역폭을 근사화한다. 이 공식을 **Carson의 법칙**이라 부른다. FM 신호의 대역폭을 3 dB 대역폭을 사용하여 구하려면 먼저 FM 신호의 스펙트럼을 구해야 하기 때문에 산출이 매우 복잡하다. Carson의 법칙은 매우 간단하게 각 변조된 신호의 대역폭을 구할 수 있도록 하기 때문에 매우 유용하게 사용된다(Carson의 법칙은 대역폭에 대한 근사값만 제공하며 스펙트럼 모양에 대해서는 정보를 제공하지 않는다).

한편 표 5.2와 그림 5.8에서 β 의 값이 매우 작으면 $J_0(\beta)$ 는 1에 근접하고 나머지

$J_n(\beta)$ 의 값은 매우 작아서 $n > 2$ 에서의 값은 무시할 만 하다. 그러면 FM 신호의 스펙트럼은 $f_c, f_c \pm f_m$ 에 있는 임펄스만 고려하는 것이 합당하므로 대역폭은

$$BW_{FM} \approx 2f_m = 2B, \beta \text{가 작은 경우} \quad (5.31)$$

가 된다. 주파수 민감도 k_f 가 작으면 변조지수 β 가 작아지므로, 협대역 FM의 근사적인 대역폭은 식 (5.31)과 같이 된다는 것을 알 수 있다. 협대역 FM의 대역폭이 $2B$ 가 되는 것은 앞서 살펴 본 바 있다.

PM 변조의 경우 $m(t) = a \cos 2\pi f_m t$ 에 의하여 PM 변조된 신호의 표현은 식 (5.23)와 유사하게

$$s_{PM}(t) = A \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_p m(t)] = A \cos[2\pi f_c t + \Delta\theta \cos 2\pi f_m t] \quad (5.32)$$

와 같이 된다. 여기서 $\Delta\theta = 2\pi k_p a$ 는 최대 위상편이며, PM 변조에서는 변조지수를 최대 위상편으로 정의한다. 즉,

$$\beta_{PM} \triangleq \Delta\theta = 2\pi k_p \max|m(t)| \quad (5.33)$$

이 된다. 그러므로 PM 신호의 스펙트럼은 기본적으로 FM과 유사하다. 그러나 스펙트럼이 변조지수와 정보신호의 주파수에 영향을 받는 양상은 FM과 다르다.

5.4 FM 신호의 복조

FM 신호에서 정보는 순시 주파수 $f_i(t) = f_c + k_f m(t)$ 에 담겨 있다. FM 변조기는 입력의 전압 크기에 비례하여 출력의 주파수가 변하는 전압-주파수 변환기라 할 수 있다. 복조기는 역으로 입력 신호의 주파수에 비례하여 출력의 전압이 변하는 주파수-전압 변환기가 된다. 따라서 그림 5.6과 같이 FM 신호의 주파수 대역에서 선형 주파수 응답을 가진 전달함수를 가진 회로를 구성하면 입력의 순시 주파수에 비례하는 출력을 얻게 할 수 있다.

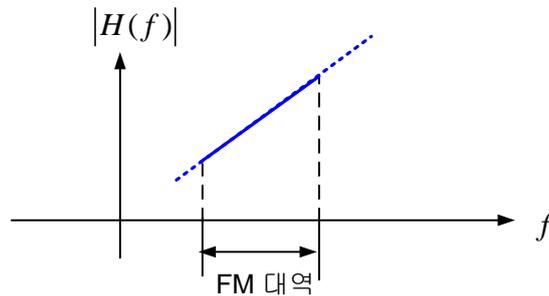


그림 5.6 FM 복조기의 주파수 응답

주파수 변별기

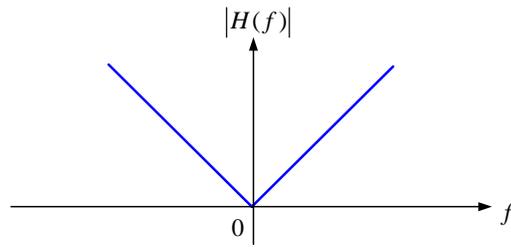
출력 전압을 입력 신호의 주파수에 비례하게 하는 가장 기본적인 회로가 미분기이다. 미분기의 전달 함수는

$$H(f) = j2\pi f = 2\pi|f|\angle 90^\circ \quad (5.34)$$

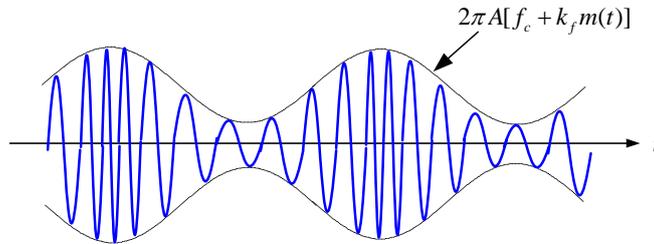
가 되어 주파수 성분 $\cos(2\pi f_c t)$ 은 $2\pi f_c \cos(2\pi f_c t + 90^\circ)$ 가 되어 주파수가 큰 성분일수록 진폭이 커져서 출력된다. 그림 5.7(a)에 미분기의 주파수 응답을 보인다. 미분기에 FM 신호가 입력되면 출력은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\text{FM}}(t) &= \frac{d}{dt} \left[A \cos \left\{ 2\pi \left(f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right) \right\} \right] \\ &= -2\pi A (f_c + k_f m(t)) \sin \left[2\pi \left(f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right) \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

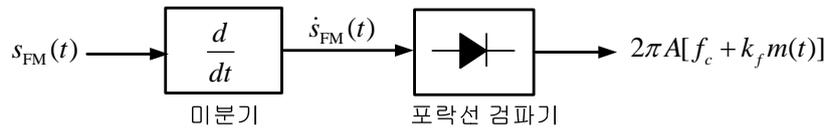
따라서 미분기 출력 신호는 AM 신호와 유사하여 AM 신호의 복조에서와 같이 포락선 검파기를 통하여 메시지 신호를 복구할 수 있다. AM 신호와의 차이점은 FM 신호를 미분한 신호는 진폭 변조와 주파수 변조가 동시에 일어난 형태가 된다는 것이다. 그림 5.7(b)에 FM 신호의 입력에 대한 미분기의 출력 파형을 보이며, 그림 5.7(c)에 미분기를 이용한 FM 복조기의 구조를 보인다.



(a)



(b)



(c)

그림 5.7 미분기와 FM 신호의 복조

(a) 미분기의 주파수 응답 (b) FM 신호의 입력에 대한 미분기의 출력 파형

(c) 미분기를 이용한 FM 복조기의 구조

5.5 Matlab을 이용한 실습

[예제 5.2] [FM 변조]

메시지 신호로 다음과 같은 두 가지 신호를 가정하자.

신호 1: 다중레벨 사각 펄스열

$$m(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 0.05 \\ -2, & 0.05 < t < 0.1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.36)$$

신호 2: 삼각 펄스

$$m(t) = 2\Lambda(2t / \tau), \quad \tau = 0.1 \quad (5.37)$$

신호 1은 펄스폭이 0.05 초인 펄스열이며, 신호 2는 펄스폭이 $\tau = 0.1$ 이고 최대값이 2인 삼각 펄스이다. 위의 메시지 신호를 주파수가 400 Hz인 반송파 $s_c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ 로써 FM 변조하라. 주파수 민감도는 $k_f = 50$ Hz/volt를 사용하라.

- 메시지 신호와 변조된 신호의 파형과 진폭 스펙트럼을 그려 보라. 신호의 파형을 그리기 위하여 샘플링 주파수는 4000 Hz를 사용하고 스펙트럼을 그리기 위한 주파수 해상도는 0.2 Hz를 사용하라.
- FM 변조된 신호의 근사 대역폭을 Carson의 법칙으로부터 예측해 보라. Matlab으로 그린 스펙트럼으로부터 근사 대역폭을 살펴 보고 예측한 결과와 비슷한지 확인해 보라.

[풀이]

FM 변조된 반송파의 각은

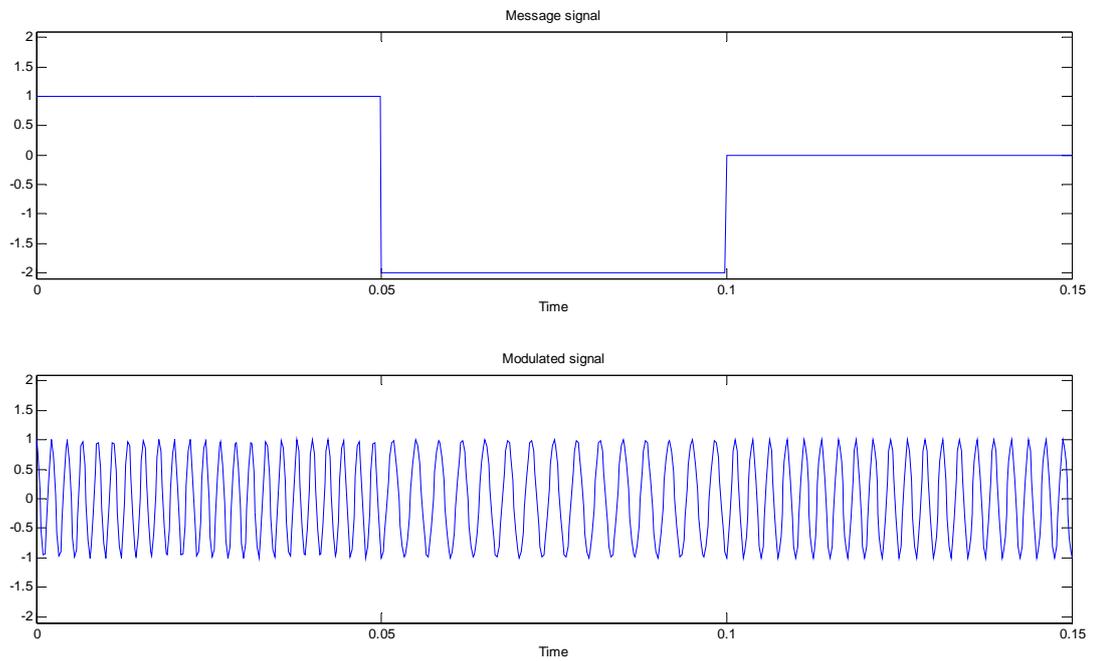
$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t 2\pi(f_c + k_f m(\tau))d\tau = 2\pi(f_c t + k_f \int_0^t m(\tau)d\tau) + \theta_0 \quad (5.38)$$

와 같이 된다. 초기위상 $\theta_0 = 0$ 으로 가정하면 FM 변조된 신호는 다음과 같이 표현할 수 있다.

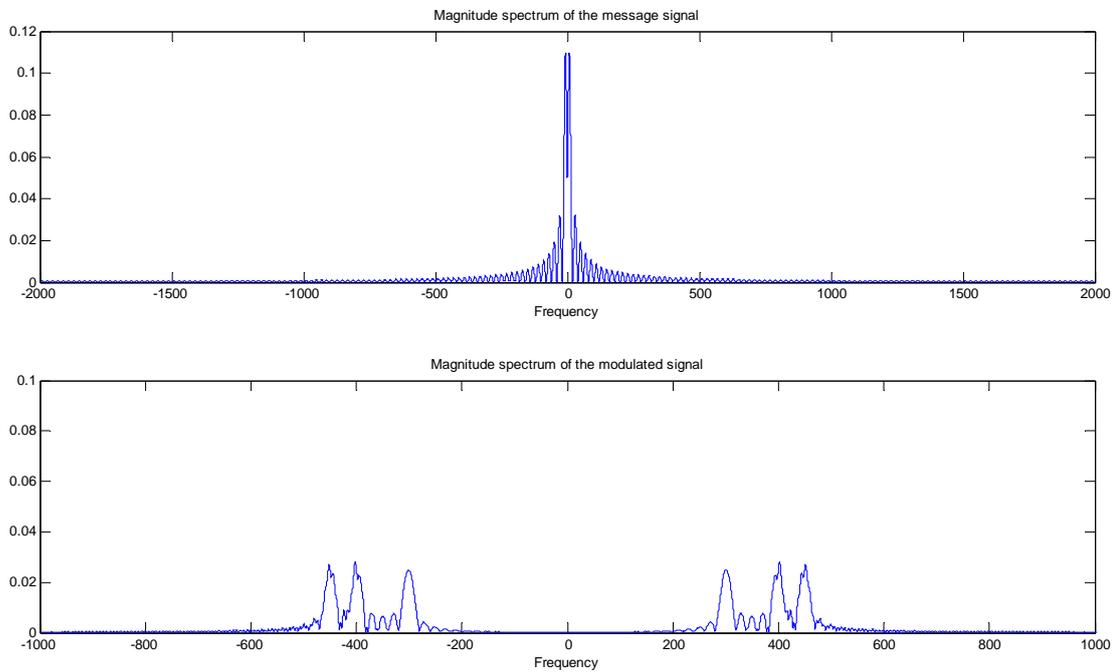
$$s_{\text{FM}}(t) = A \cos \theta(t) = A \cos[2\pi(f_c t + k_f \int_0^t m(\tau)d\tau)] \quad (5.39)$$

FM 변조 신호의 생성과 스펙트럼을 구하기 위한 Matlab 코드의 예로 FM.m을 참고하라. 이 파일을 실행시켜서 다음과 같은 결과를 얻는지 확인하라.

1) 신호 1: 다중레벨 사각 펄스열



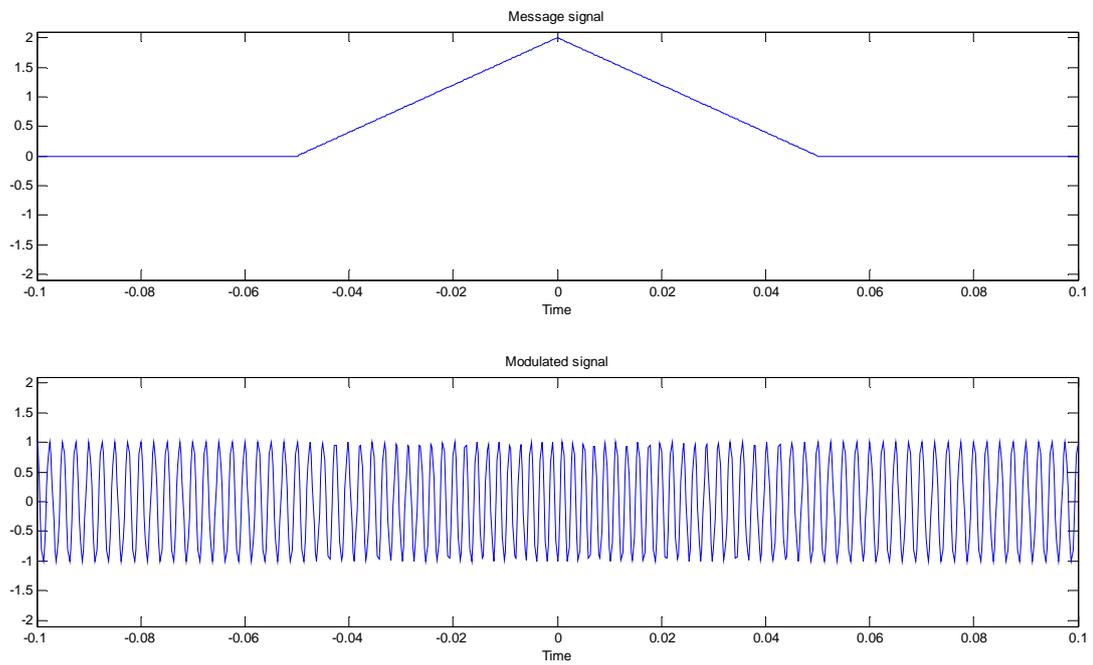
(a)



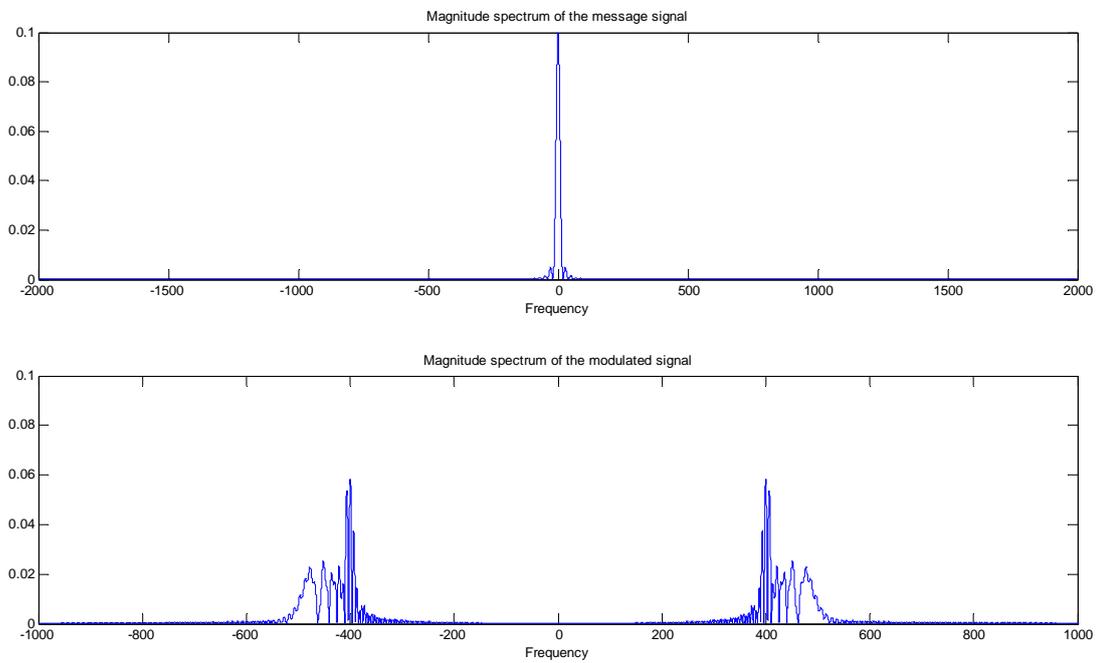
(b)

그림 5.8 다중레벨 사각 펄스 신호와 FM 변조된 신호의 파형과 진폭 스펙트럼

2) 신호 2: 삼각 펄스



(a)



(b)

그림 5.9 삼각 펄스 신호와 FM 변조된 신호의 파형과 진폭 스펙트럼

예제 5.2를 위한 Matlab 프로그램의 예(FM.m)

```

% -----
% FM.m
% Matlab program example for FM modulation
% Message signals are:
% Signal 1: multilevel rectangular pulse sequence
%      m(t) = 1   for 0 < t < 0.05
%      m(t) = -2  for 0.05 < t < 0.1
%      m(t) = 0   otherwise
%
% Signal 2: triangular pulse with pulse width tau=0.1
% -----
df=0.2           % desired frequency resolution [Hz]
ts=1/4000;      % sampling interval [sec]
fs=1/ts;       % sampling frequency
fc=300;        % carrier frequency
kf=50 ;        % frequency sensitivity [Hz/volt]
% -----
% For signal 1: multilevel rectangular pulse sequence
% -----
T1=0; T2=0.15; % observation time interval (from T1 to T2 sec)
t=[T1:ts:T2]; % observation time vector
% message signal
m=[ones(1,T2/(3*ts)), -2*ones(1,T2/(3*ts)), zeros(1,T2/(3*ts)+1)];

integ_m(1)=0;
for i=1:length(t)-1 % integral of m
    integ_m(i+1)=integ_m(i)+m(i)*ts;
    echo off ;
end
echo on ;
[M,m,df1]=fft_mod(m,ts,df); % Fourier transform of message signal
M=M/fs; % scaling
f=[0:df1:df1*(length(m)-1)]-fs/2; % frequency vector
s_m=cos(2*pi*(fc*t + kf*integ_m)); % modulated signal
[S_m,s_m,df1]=fft_mod(s_m,ts,df); % Fourier transform of modulated signal
S_m=S_m/fs; % scaling
pause % Press any key to see the signal waveform

subplot(2,1,1)
plot(t,m(1:length(t)))
axis([T1 T2 -2.1 2.1])
xlabel('Time')
title('Message signal')
subplot(2,1,2)
plot(t,s_m(1:length(t)))
axis([T1 T2 -2.1 2.1])
xlabel('Time')
title('Modulated signal')
pause % Press any key to see the spectrum
subplot(2,1,1)
plot(f,abs(fftshift(M)))
xlabel('Frequency')
title('Magnitude spectrum of the message signal')

```

```

subplot(2,1,2)
plot(f,abs(fftshift(S_m)))
title('Magnitude spectrum of the modulated signal')
xlabel('Frequency')
pause % Press any key to continue for signal 2
% -----
% For signal 2: triangular pulse with pulse width tau=0.1 and amplitude=2
% -----
T1=-0.1; T2=0.1; % observation time interval (from T1 to T2 sec)
t=[T1:ts:T2]; % observation time vector
% message signal
tau=0.1; % Pulse width [sec]
m=2*triangle(tau, T1, T2, fs, df);

integ_m(1)=0;
for i=1:length(t)-1 % integral of m
    integ_m(i+1)=integ_m(i)+m(i)*ts;
    echo off ;
end
echo on ;
[M,m,df1]=fft_mod(m,ts,df); % Fourier transform of message signal
M=M/fs; % scaling
f=[0:df1:df1*(length(m)-1)]-fs/2; % frequency vector
s_m=cos(2*pi*(fc*t + kf*integ_m)); % modulated signal
[S_m,s_m,df1]=fft_mod(s_m,ts,df); % Fourier transform of modulated signal
S_m=S_m/fs; % scaling
pause % Press any key to see the signal waveform
figure;
subplot(2,1,1)
plot(t,m(1:length(t)))
axis([T1 T2 -2.1 2.1])
xlabel('Time')
title('Message signal')
subplot(2,1,2)
plot(t,s_m(1:length(t)))
axis([T1 T2 -2.1 2.1])
xlabel('Time')
title('Modulated signal')
pause % Press any key to see the spectrum
subplot(2,1,1)
plot(f,abs(fftshift(M)))
xlabel('Frequency')
title('Magnitude spectrum of the message signal')
subplot(2,1,2)
plot(f,abs(fftshift(S_m)))
title('Magnitude spectrum of the modulated signal')
xlabel('Frequency')

```

[과제 1] 주파수 민감도 k_f 를 10, 100, 150으로 변화시켜가면서 예제 5.2와 동일한 과정을 반복하라. 주파수 민감도에 의하여 FM 신호의 파형과 스펙트럼이 어떤 영향을 받는가?

[예제 5.3] [FM 신호의 검파]

예제 5.2에서 사용한 메시지 신호로 FM 변조한 신호를 복조하는 실습이다. 동기(coherent) 검파와 비동기(noncoherent) 검파의 두 가지 복조 방법에 대하여 동작을 확인한다. 동기 검파에서는 먼저 수신된 신호로부터 위상을 추출하여 메시지 신호를 적분한 것에 비례하는 신호를 얻는다. 추출한 위상을 미분한 후 $2\pi k_f$ 로 나누어 메시지 신호를 재생한다. 비동기 복조는 여러 가지 방식이 있으나 여기에서는 주파수 변별기를 이용한다. 즉 수신 신호를 미분하여 진폭이 수신 신호의 순시 주파수에 비례하는 신호를 얻은 다음, DSB-TC 신호의 비동기 검파에서 사용한 포락선 검파를 사용하여 메시지 신호와 모양이 같은 신호를 얻는다. 이 신호를 스케일링하고 직류 성분을 제거하면 메시지 신호를 얻을 수 있다.

두 종류의 메시지 신호(신호 1: 다중레벨 펄스열, 신호 2: 삼각 펄스) 각각에 대하여 다음과 같은 과정을 수행한다.

- 1) 메시지 신호와 변조된 신호의 파형을 그려 보라.
- 2) 이 신호가 수신되었다고 가정하고 동기 복조기의 출력 파형을 그려 보라.

일반적인 대역통과 신호는

$$x(t) = A(t)\theta(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \quad (5.40)$$

와 같이 표현되며, FM 신호의 경우 진폭은 $A(t) = A$ 로 일정하고 위상은

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \quad (5.41)$$

와 같이 된다. FM 신호의 저역통과 등가 신호(또는 복소 포락선)는

$$\tilde{x}(t) = A e^{j\phi(t)} \quad (5.42)$$

가 되며, analytic 신호와는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$x_{\text{analytic}}(t) = A e^{j\phi(t)} e^{j2\pi f_c t} = \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_c t} \quad (5.43)$$

Matlab의 hilbert.m 함수는 입력 신호에 대한 analytic 신호를 출력한다. 따라서 수신되는 대역통과 신호로부터 analytic 신호를 구한 다음 $\exp(-j2\pi f_c t)$ 를 곱하면 위상 $\phi(t)$ 를 얻을 수 있다. 교재에 첨부된 complex_env.m 함수는 이 방법을 이용하여 입력되는 대역통과 신호에 대한 저역통과 등가신호, 즉 복소 포락선(complex envelope)을 구하여 출력한다. 이 결과로부터 위상을 추출하고 $2\pi k_f$ 로 나누면 메시지 신호를 얻을 수 있다.

- 3) 다음에는 비동기 복조를 해 본다.

수신 신호를 미분한 후 출력의 포락선을 구해본다. 즉 미분기 출력 신호에 대하여 hilbert.m

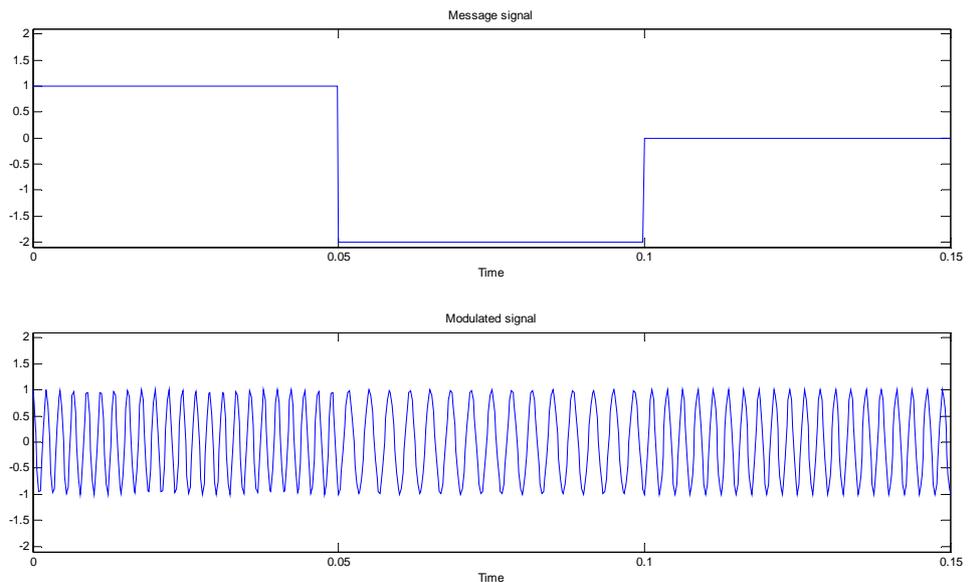
함수를 사용하여 analytic 신호를 얻고 절대값을 취하여 포락선을 얻을 수 있다. 포락선 검파기 출력 신호의 파형을 그려 보라.

4) 변조된 신호에 잡음이 더해져서 수신되는 경우를 고려하자. 메시지 신호가 위에 주어진 시구간을 주기로 반복되는 신호라고 가정하자. SNR이 30 dB가 되도록 Gaussian 잡음을 발생시켜서 FM 신호에 더하여 수신 신호를 만든다. 수신된 신호로부터 동기 및 비동기 복조 과정을 거쳐 출력된 신호의 파형을 그려 보라. (아래에 있는 샘플 코드에서는 잡음이 신호에 더해지지 않도록 되어 있다. 잡음이 있는 환경을 실험하기 위해서는 송신 신호에 잡음을 더하는 부분에 있는 %를 삭제하고 실행시켜야 할 것이다.)

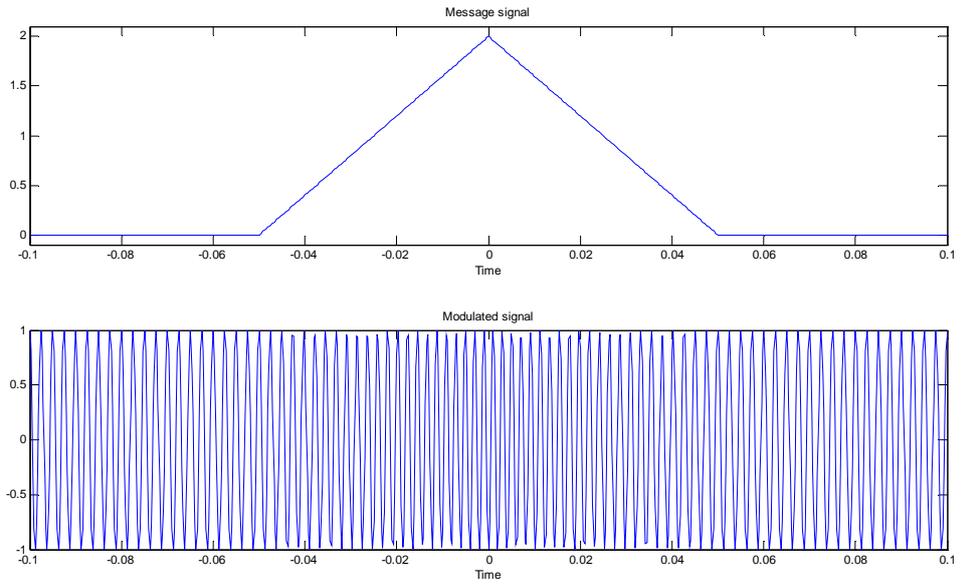
[풀이]

위의 실습을 위한 Matlab 코드의 예로 FM_DEM.m을 참고하라. 이 파일을 실행시켜서 다음과 같은 결과를 얻는지 확인하라.

1) 메시지 신호와 변조된 신호의 파형



(a)

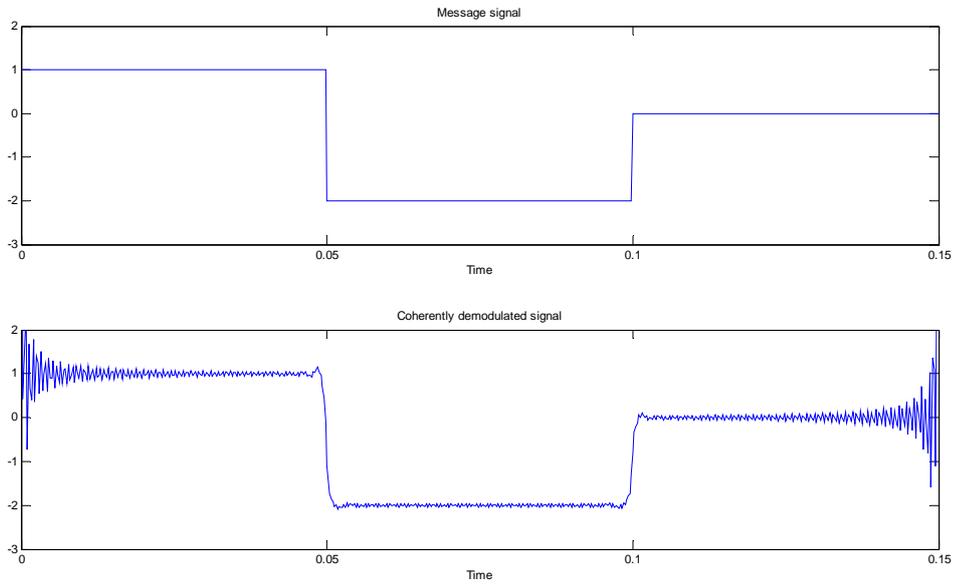


(b)

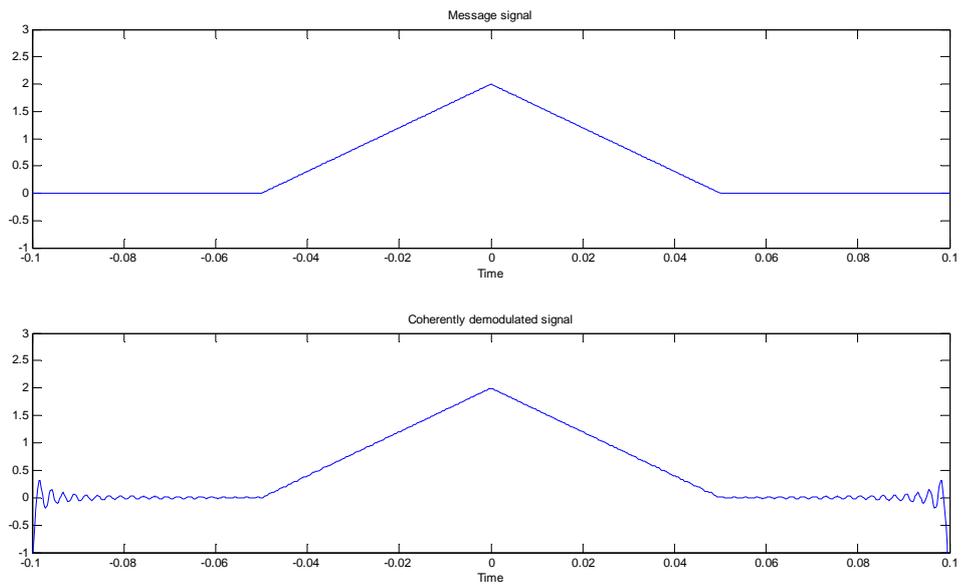
그림 5.10 메시지 신호와 FM 변조된 신호의 파형

(a) 다중레벨 펄스열 (b) 삼각펄스

2) 메시지 신호와 동기식 복조기 출력 신호의 파형



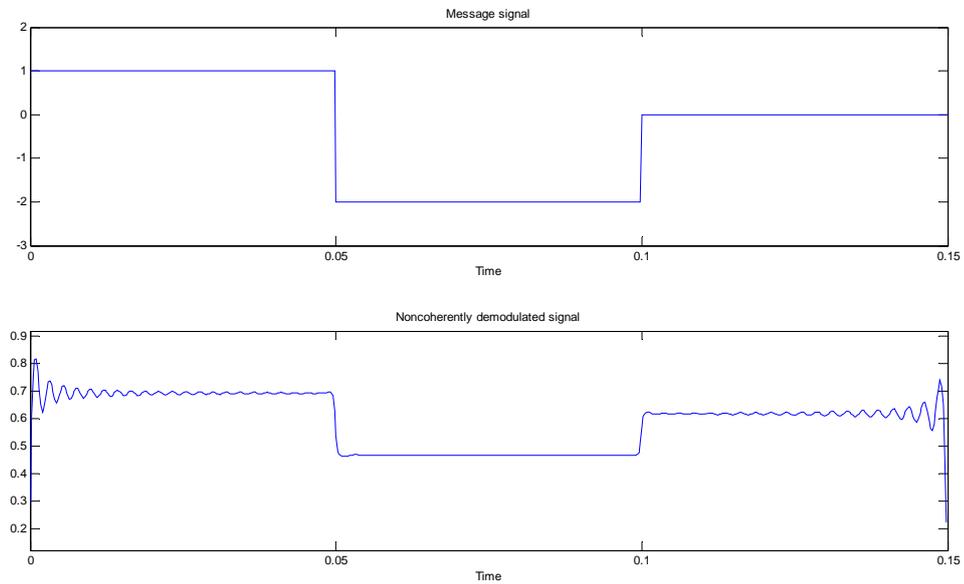
(a)



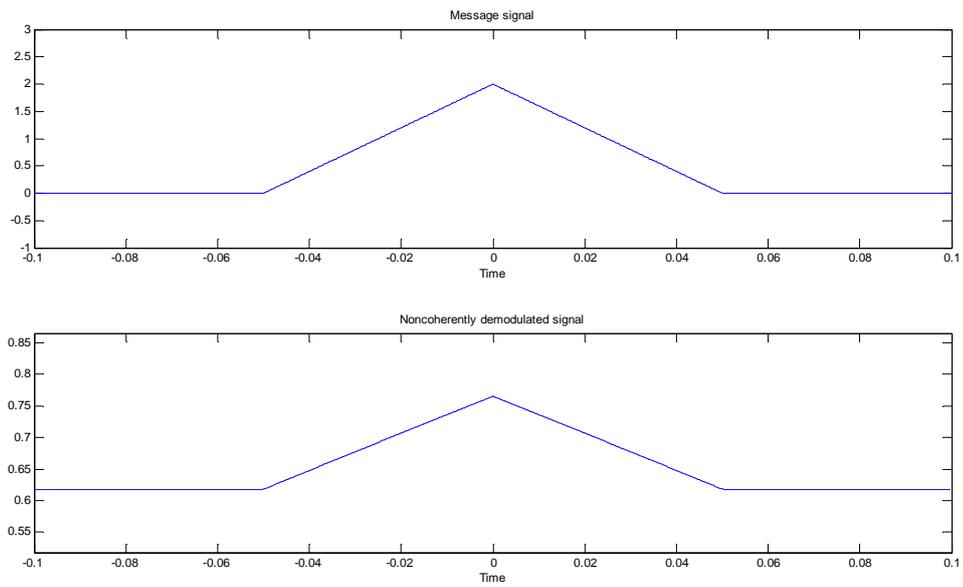
(b)

그림 5.11 동기식 FM 검파기로 복조한 신호의 파형

3) 메시지 신호와 비동기식 복조기 출력 신호의 파형



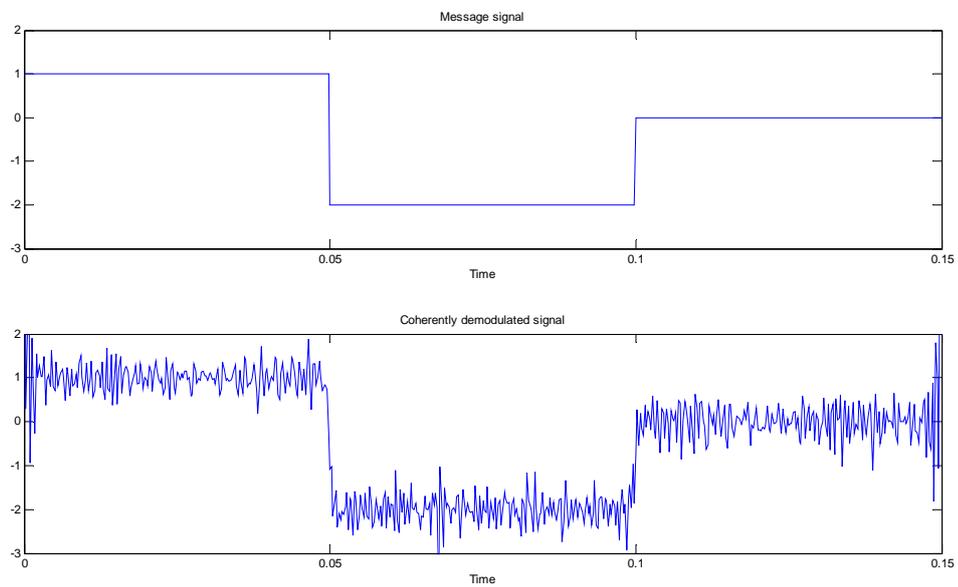
(a)



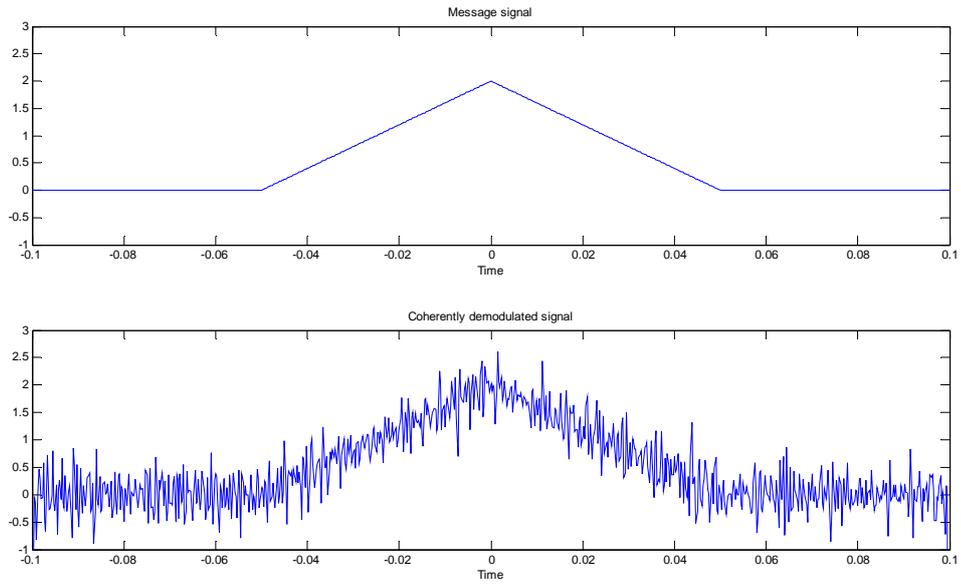
(b)

그림 5.12 비동기식 FM 검파기로 복조한 신호의 파형

4) 변조된 신호에 잡음이 더해져서 수신되는 경우 동기 복조기 출력 신호의 파형



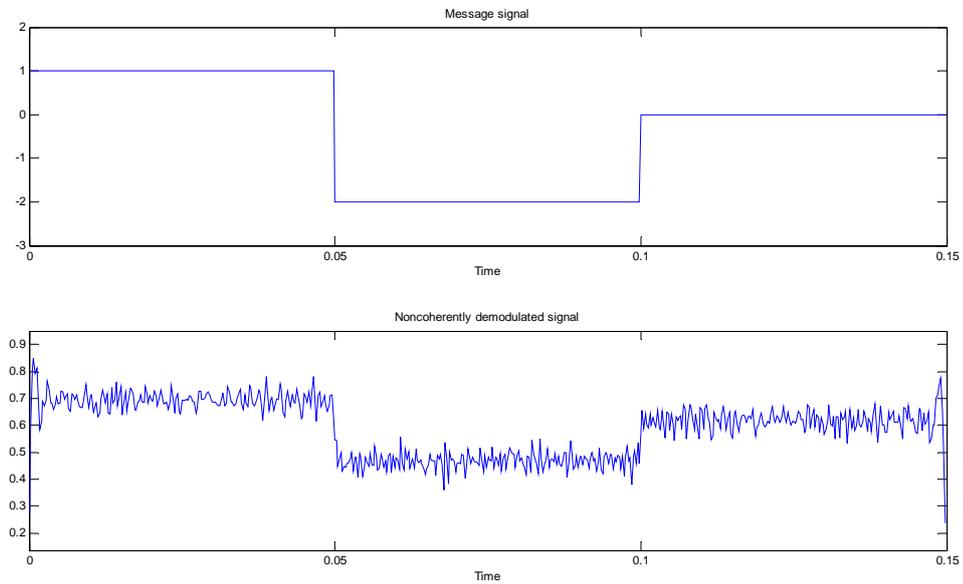
(a)



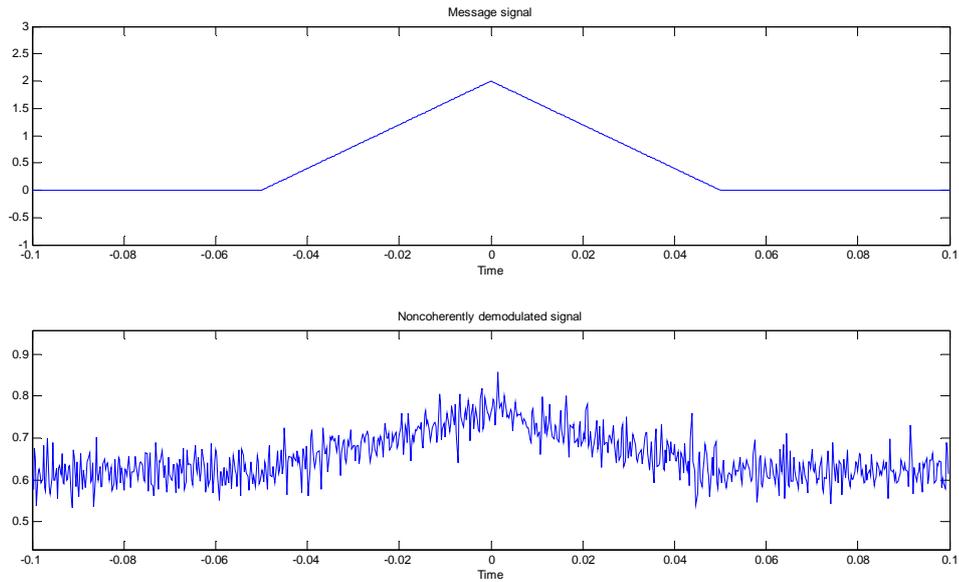
(b)

그림 5.13 동기식 FM 검파기로 복조한 신호의 파형

5) 신호에 잡음이 더해져서 수신되는 경우 비동기 복조기 출력 신호의 파형



(a)



(b)

그림 5.14 비동기식 FM 검파기로 복조한 신호의 파형

예제 5.3을 위한 Matlab 프로그램의 예(FM_DEM.m)

```

% -----
% FM_DEM.m
% Matlab program example for FM demodulation
% Message signals are:
% Signal 1: multilevel rectangular pulse sequence
%      m(t) = 1   for 0 < t < 0.05
%      m(t) = -2  for 0.05 < t < 0.1
%      m(t) = 0   otherwise
%
% Signal 2: triangular pulse with pulse width tau=0.1
% -----
clear; close all
echo on
df=0.2           % desired frequency resolution [Hz]
ts=1/4000;      % sampling interval [sec]
fs=1/ts;        % sampling frequency
fc=400;         % carrier frequency
kf=50;          % frequency sensitivity [Hz/volt]

% -----
% Message signal generation
% -----
% For signal 1: multilevel rectangular pulse sequence
T1=0; T2=0.15;  % observation time interval (from T1 to T2 sec)
m=[ones(1,T2/(3*ts)), -2*ones(1,T2/(3*ts)), zeros(1,T2/(3*ts)+1)];

% For signal 2: triangular pulse with pulse width tau=0.1 and amplitude=2
% T1=-0.1; T2=0.1;   % observation time interval (from T1 to T2 sec)
% m=2*triangle(0.1, T1, T2, fs, df);

```

```

        m_min=min(m); m_max=max(m);

% -----
% Modulation
% -----
t=[T1:ts:T2];    % observation time vector
N=length(t);
integ_m(1)=0;
for i=1:length(t)-1           % integral of m
    integ_m(i+1)=integ_m(i)+m(i)*ts;
    echo off ;
end
echo on ;
[M,m,df1]=fft_mod(m,ts,df);    % Fourier transform of message signal
M=M/fs;                        % scaling
f=[0:df1:df1*(length(m)-1)]-fs/2; % frequency vector
s_m=cos(2*pi*(fc*t + kf*integ_m)); % modulated signal
[S_m,s_m,df1]=fft_mod(s_m,ts,df); % Fourier transform of modulated signal
S_m=S_m/fs;                    % scaling
pause % Press any key to see the signal waveform

subplot(2,1,1);
plot(t,m(1:length(t)));
axis([T1 T2 m_min-0.1 m_max+0.1]);
xlabel('Time');
title('Message signal');
subplot(2,1,2);
plot(t,s_m(1:length(t)));
xlabel('Time');
title('Modulated signal');
pause % Press any key to see the spectrum

subplot(2,1,1);
plot(f,abs(fftshift(M))) ;
xlabel('Frequency');
title('Magnitude spectrum of the message signal');
subplot(2,1,2);
plot(f,abs(fftshift(S_m)))
title('Magnitude spectrum of the modulated signal');
xlabel('Frequency');
pause % Press any key to demodulate the FM signal

% -----
% Channel
% -----
snr_dB=30;                    % SNR in dB
snr=10^(snr_dB/10);          % linear SNR
signal_power=(norm(s_m(1:N))^2)/N; % modulated signal power
noise_power=signal_power/snr; % noise power
noise_std=sqrt(noise_power); % noise standard deviation
noise=noise_std*randn(1,N); % Generate noise
r=s_m(1:N);                  % When there is no noise
r=r+noise;                   % Add noise to the modulated signal

% -----
% Coherent demodulation

```

```

% -----
z=complex_env(r,ts,T1,T2,fc);      % Find phase of the received signal
phase=angle(z);
theta=unwrap(phase);              % Restore original phase
demod=(1/(2*pi*kf))*(diff(theta)/ts); % Differentiate and scale phase
pause % Pres any key to see plots of the message and the demodulator output
figure;
subplot(2,1,1)
plot(t,m(1:length(t)));
axis([T1 T2 m_min-1 m_max+1]);
xlabel('Time')
title('Message signal')
t1=t(1:length(t)-1);
subplot(2,1,2)
plot(t1,demod(1:length(t1)));
axis([T1 T2 m_min-1 m_max+1]);
xlabel('Time');
title('Demodulated signal');

% -----
% Noncoherent demodulation
% -----
dr_dt=diff(r);
z=hilbert(dr_dt);                 % Get analytic signal
envelope=abs(z);                  % Find the envelope
demod1=envelope;
pause % Pres any key to see plots of the message and the demodulator output
figure;
subplot(2,1,1)
plot(t,m(1:length(t)));
axis([T1 T2 m_min-1 m_max+1]);
xlabel('Time')
title('Message signal')
subplot(2,1,2)
plot(t1,demod1(1:length(t1)));
axis([T1 T2 min(demod1)-0.1 max(demod1)+0.1]);
xlabel('Time');
title('Demodulated signal');

```

```

function y=complex_env(x,ts,T1,T2,fc)
% -----
% This function returns the lowpass equivalent of the input bandpass signal
%     x = input bandpass signal
%     ts = sampling interval
%     [T1,T2] = observation time interval
%     fc = center frequency
% -----
t=[T1:ts:T2];
z=hilbert(x); % Get analytic signal
y=z.*exp(-j*2*pi*fc*t); % Complex envelope

```

[과제 2] 주파수 변조 대신 위상 변조를 하는 경우에 대하여 예제 5.2와 예제 5.3의 변복조 과정을 반복하라. 여기서 $k_p = 100$ 을 사용하라.