치환적분

$$(1)\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) = F(u) = \int f(u)\,du$$

※ 치환적분 : 합성함수의 미분을 응용

$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$에서

① $u = g(x)$라 놓으면

② $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$ 즉, $du = g'(x)dx$이므로 위식에 대입하면

$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

즉, 치환적분법을 사용하면 적분변수가 **x**에서 **u**로 변환되어 적분이 간단해진다.

[핵심] 피적분함수 중에서 미분해서 다른 피적분함수가 되는 것을 $u = g(x)$로 놓으면 된다.

치환적분의 계산법

$$(1)\ \int \boxed{f(g(x))\, g'(x)}\, dx = F(g(x)) = F(u) = \int \boxed{f(u)}\, du$$

예제 4-4 다음 부정적분을 구하여라.

$$(1)\ \int 3x^2 (x^3+1)\, dx \qquad (2)\ \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

미분

solution

(1) $u = x^3 + 1$ 이라 하면, $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$ 이고 따라서 $du = 3x^2 dx$ 이다. 그러므로

$$\int 3x^2 (x^3+1)\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+1)^2 + C$$

예제 4-5 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3x^2(x^3+1)\,dx$ (2) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

미분

solution

(2) $u = x^2+1$ 이라 하면, $\frac{du}{dx} = 2x$ 이고 따라서 $du = 2x\,dx$ 이다. 그러므로

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

$$= \ln(x^2+1) + C$$

■

예제 4-6 다음 부정적분을 구하여라.

미분

(1) $\int (1+\sin x)^2 \cos x\, dx$ (2) $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$

미분

solution (1) $u = 1+\sin x$ 라 하면, $\frac{du}{dx} = \cos x$ 이고 따라서 $du = \cos x\, dx$ 이다. 그러므로

$$\int (1+\sin x)^2 \cos x\, dx = \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}(1+\sin x)^3 + C$$

(2) $u = \ln x$ 라 하면, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ 이고 따라서 $du = \frac{1}{x}dx$ 이다. 그러므로

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C$$

$$= \ln|\ln x| + C$$

■

제곱근을 포함하는 적분의 치환적분

치환적분법을 이용하면, 피적분함수가 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$와 같이 제곱근($\sqrt{\ }$)형태인 경우에 대하여 다음과 같이 적분변수 x를 삼각함수로 치환하여 쉽게 부정적분을 얻을 수 있다.

유형 1 $\sqrt{a^2-x^2}$ 을 포함하는 경우 : $x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$으로 치환하면,

$$dx=a\cos\theta\,d\theta,\quad \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=a\sqrt{1-\sin^2\theta}=a\cos\theta$$

유형 2 $\sqrt{a^2+x^2}$ 을 포함하는 경우 : $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$으로 치환하면,

$$dx=a\sec^2\theta\,d\theta,\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=a\sqrt{1+\tan^2\theta}=a\sec\theta$$

유형 3 $\sqrt{x^2-a^2}$ 을 포함하는 경우 : $x=a\sec\theta\left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\text{ 또는 }\pi\le\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$로 치환하면,

$$dx=a\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta,\quad \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}=a\sqrt{\sec^2\theta-1}=a\tan\theta$$

예제 4-7

다음 함수를 미분하여라.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ (2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

solution

유형 2

(2) $\sqrt{x^2+2x+2} = \sqrt{(x+1)^2+1}$ 이므로 $x+1=\tan\theta$ 라 하면, $dx=\sec^2\theta\, d\theta$,

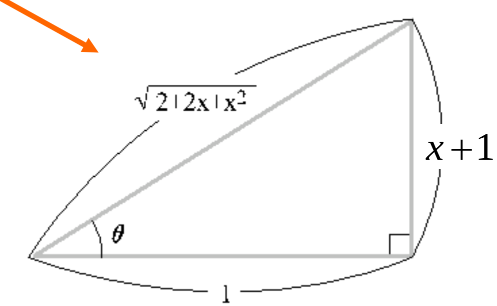
$\sqrt{x^2+2x+2} = \sec\theta$ 이고

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$$

$$= \int \frac{\tan\theta}{\sec\theta} sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \tan\theta \sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta + C = \sqrt{x^2+2x+2} + C \qquad \blacksquare$$



[참고] 적분공식

피적분함수의 분자가 분모의 미분으로 주어지는 꼴일 때의 적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

다음 부정적분을 구하여라.

① $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$ ② $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2+x-4}\,dx$

해 ① $(e^{2x}+1)' = 2e^{2x}$이므로

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1}\,dx$$

$$= \ln(e^{2x}+1) + C$$

② $(x^2+x-4)' = 2x+1$이므로 $4x+2 = 2(2x+1)$

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x-4}\,dx = 2\int \frac{(x^2+x-4)'}{(x^2+x-4)}\,dx$$

$$= 2\ln|x^2+x-4| + C$$

부분 적분법

$$(5)\quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

미분공식에서

$\dfrac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로, 양변을 적분하면

$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x)dx$ 정리하면 위 식이 됨.

부분 적분법

"복잡한 형태의 적분 = 함수의 곱 – 간단한 형태의 적분 형태" 로 바꾸는 적분법임.
(즉, 주어진 적분의 차수를 1차 내려서 적분하는 방법임)

f(x) : 미분하면 차수가 낮아지거나, 쉬운 형태로 변하는 함수를 잡는다.

$$(5) \quad \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

g'(x) : 적분해도 차수가 변하지 않거나, 형태가 변하지 않는 함수를 잡는다,

f(x) ⟷ g '(x)

로그	다항	삼각	지수
lnx	x, x^2, …	sinx	e^x

미분하면 : 1/x ↓ 차수 낮아진다 ↓ 그대로 ↓ 그대로

예제 4-8 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x\cos x\,dx$ (2) $\int \sec^3 x\,dx$

solution

(1) $u = x,\ v' = \cos x$ 라 하면, $u' = 1,\ v = \sin x$ 이므로

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

예제 4-9 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x\cos x\,dx$ (2) $\int \sec^3 x\,dx$

solution

(2) $u=\sec x,\ v'=\sec^2 x$ 이라 하면, $u'=\sec x\tan x,\ v=\tan x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x\tan x-\int(\sec x\tan x)\tan x\,dx\\ &=\sec x\tan x-\int \sec x\tan^2 x\,dx\\ &=\sec x\tan x-\int \sec x(\sec^2 x-1)\,dx\\ &=\sec x\tan x-\int \sec^3 x\,dx+\int \sec x\,dx\end{aligned}$$

그러므로 좌변과 우변을 정리하면

$$2\int \sec^3 x\,dx=\sec x\tan x-\int \sec x\,dx$$

이다. 한편 $\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C'$ 이므로, 구하고자 하는 부정적분은

$$\int \sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C\quad\left(C=\frac{1}{2}C'\right)$$

■

예제 4-10

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x e^{2x}\,dx$ (2) $\int \ln x\,dx$

(3) $\int \sec^3 x\,dx$ (4) $\int \tan^{-1} x\,dx$

solution

(1) $u = x,\ v' = e^{2x}$ 이라 하면, $u' = 1,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}$ 이므로

$$\int x e^{2x}\,dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

(2) $u = \ln x,\ v' = 1$ 이라 하면, $u' = 1/x,\ v = x$ 이므로

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = (\ln|x|)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln|x| - \int 1\,dx = x\ln|x| - x + C$$

$$= x(-1 + \ln|x|) + C$$

예제 4-11 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x e^{2x} dx$ (2) $\int \ln x \, dx$

(3) $\int \sec^3 x \, dx$ (4) $\int \tan^{-1} x \, dx$

solution

(4) $u = \tan^{-1} x$, $v' = 1$이라 하면, $u' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $v = x$ 이므로

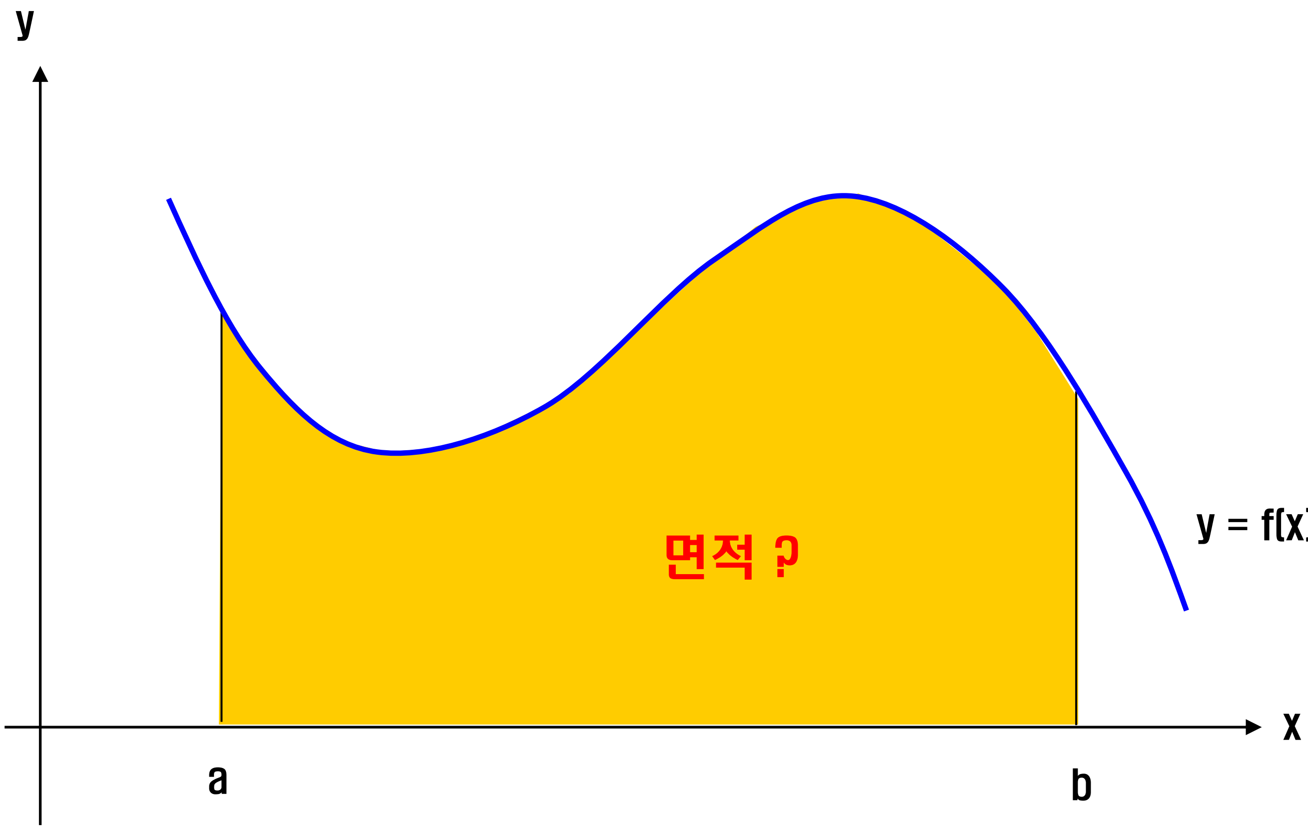
$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

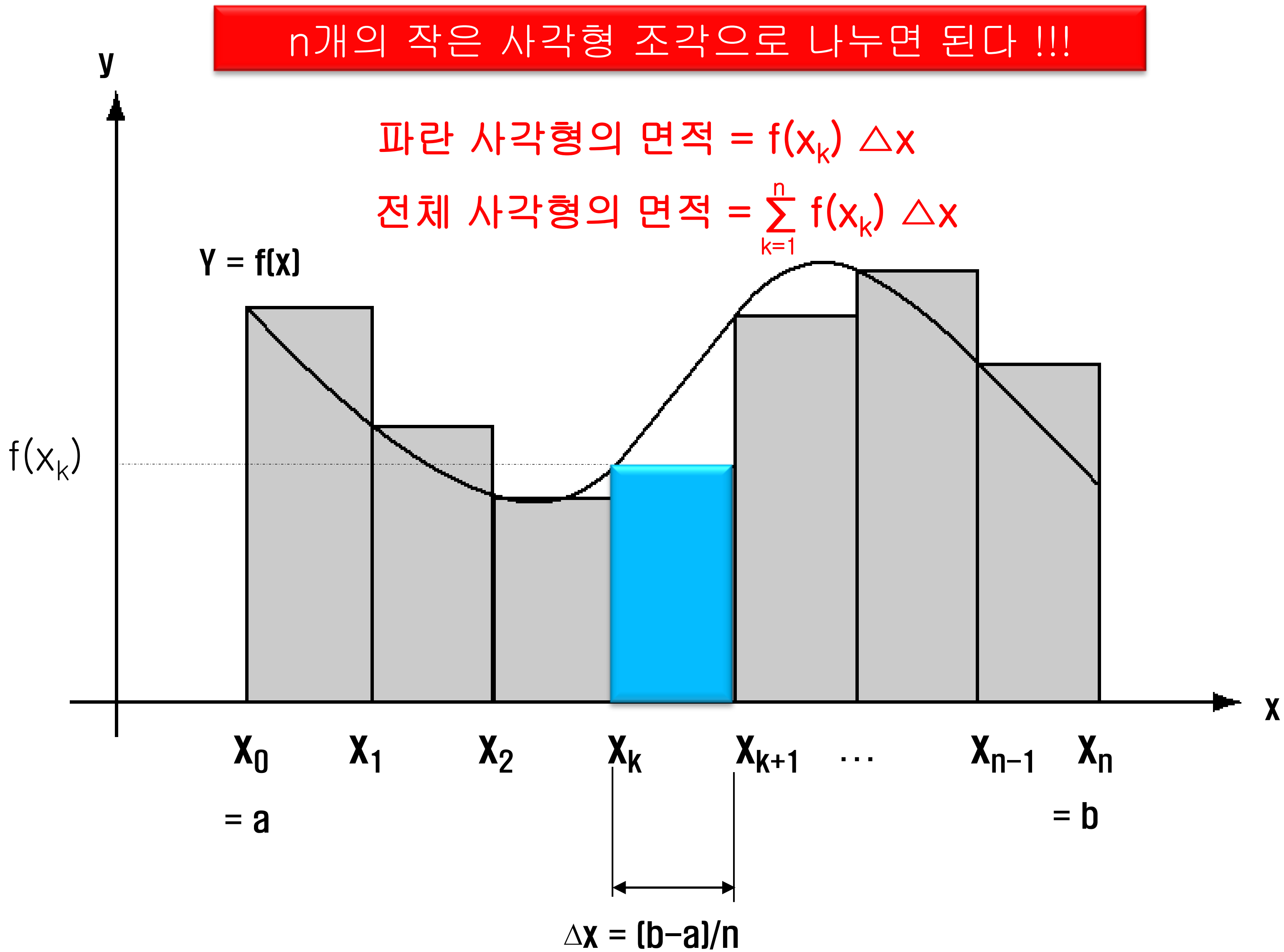
$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

■

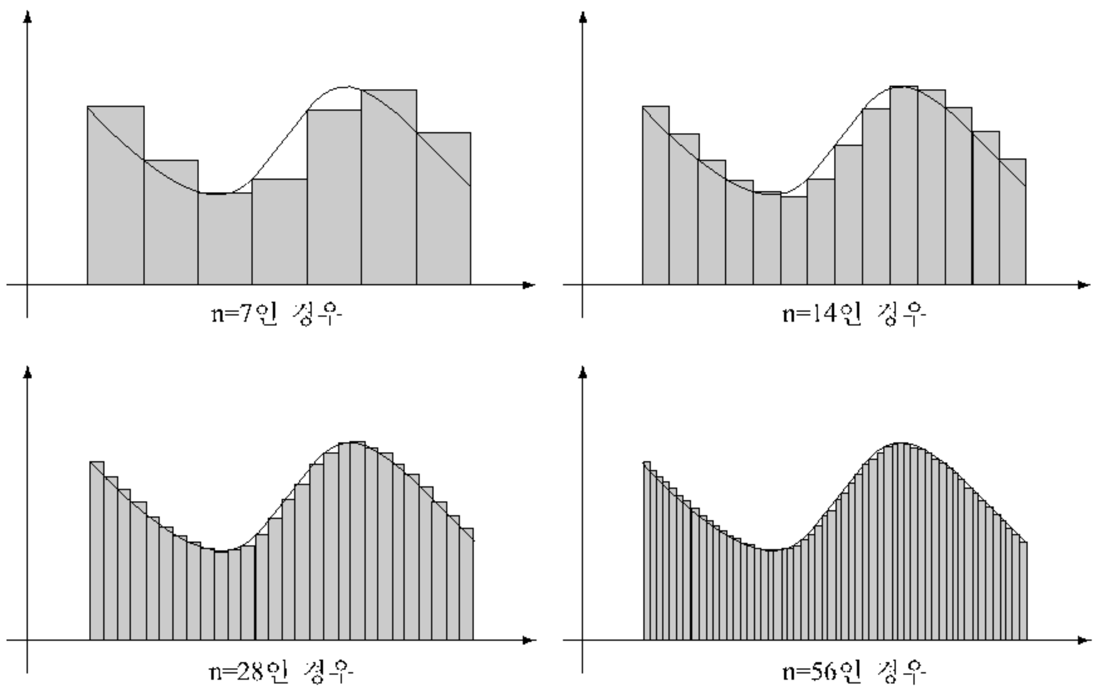
함수 $y=f(x)$와 $x=a$, $x=b$ 그리고 x축으로 둘러싸인 면적? (단, $f(x) \geq 0$)



4.4 정적분 (definite integral)



4.4 정적분 (definite integral)



구분구적법에 의한 넓이

n 이 많아질수록 → 구하고자 하는 면적에 가까워짐

n = ∞ 이면?

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

$I = \int_a^b f(x)\,dx$: $f(x)$의 정적분(definite integral)

여기서 a : 하한(lower limit), b : 상한(upper limit)

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n}$	$f(x_k)$	Δx	: 구분구적법
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$\int_a^b$	$f(x)$	dx	: 정적분

예제 4-12

정적분의 정의에 의하여 다음을 구하여라.

(1) $\int_a^b c\,dx$ (c는 실수) (2) $\int_0^b x^2\,dx$ ($b>0$)

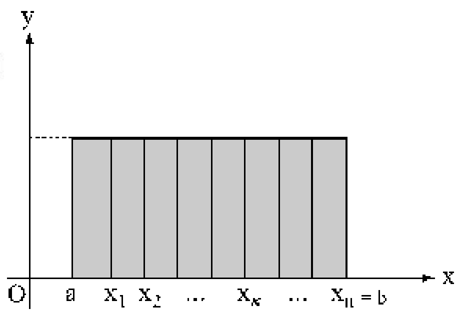
solution

(1) $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $f(x_k)=c$ 이므로

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x$$

$$= c\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n} = c\lim_{n\to\infty}(b-a)$$

$$= c(b-a)$$



예제 4-13

정적분의 정의에 의하여 다음을 구하여라.

(1) $\int_a^b c\,dx$ (c는 실수)　　　　(2) $\int_0^b x^2\,dx$ ($b>0$)

solution

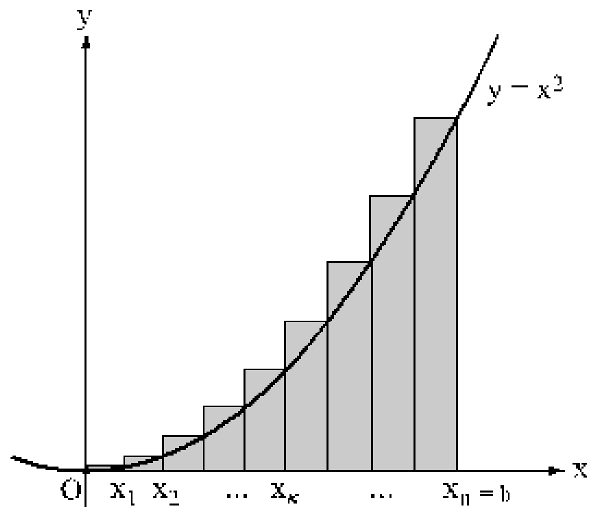
(2) $\Delta x = \dfrac{b}{n}$, 폐구간 $[0, b]$를 n 등분하여 임의의 점 x_k를 오른쪽 끝점 $x_k = \dfrac{kb}{n}$로 택한다. $f(x_k) = \left(\dfrac{kb}{n}\right)^2$이므로

$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^2\left(\frac{b}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{b^3}{3}$$



4.4 정적분 (definite integral)

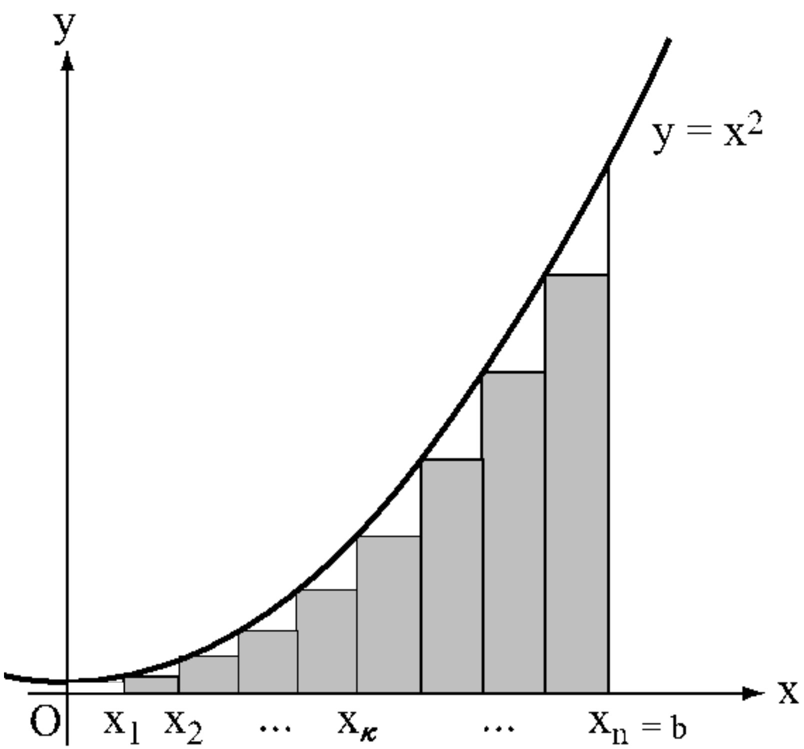
$\Delta x = \dfrac{b}{n}$, $f(x_k) = \left(\dfrac{kb}{n}\right)^2$ 이므로

$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^2\left(\frac{b}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{b^3}{3}$$



n = ∞가 되면 두 그래프의 면적은? 같은가 다른가?

정적분 공식

(1) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(3) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

(4) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (단, c=상수)

(5) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (단, a < b < c)

정적분의 성질

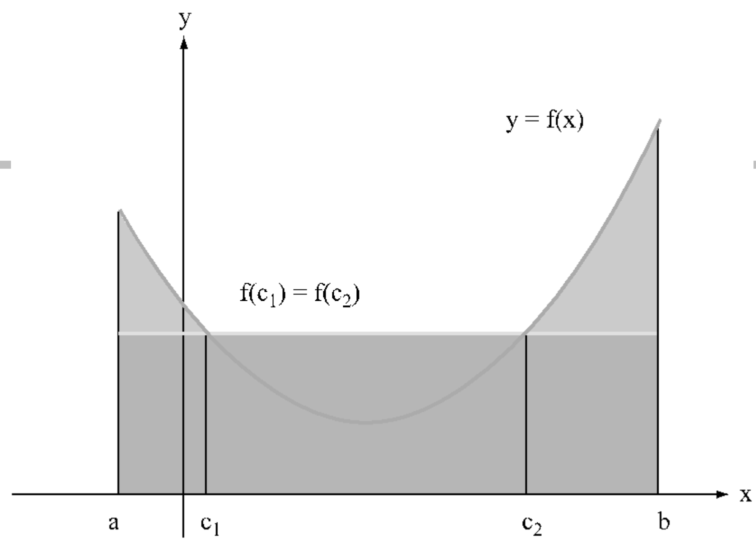
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$이므로

$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|dx$이다. 그러므로 다음 성질이 성립한다.

(10) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

(11) $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$를 만족하는 c가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재

: 적분의 평균값정리(mean value theorem)



예제 4-14 구간 $[0, 2]$에서 $f(x) = x^2$에 적분의 평균값 정리를 만족하는 점 c를 구하여라.

solution

예제 1에서 $\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$ 이므로 $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$ 이다.

또한 밑면의 길이가 2이고, 높이가 $f(c) = c^2$인 사각형의 넓이는 $2c^2$ 이므로 적분의 평균값 정리를 만족하는 점 c는

$$\frac{8}{3} = \int_0^2 x^2\,dx = (2-0)\,c^2$$

으로부터 $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. ■