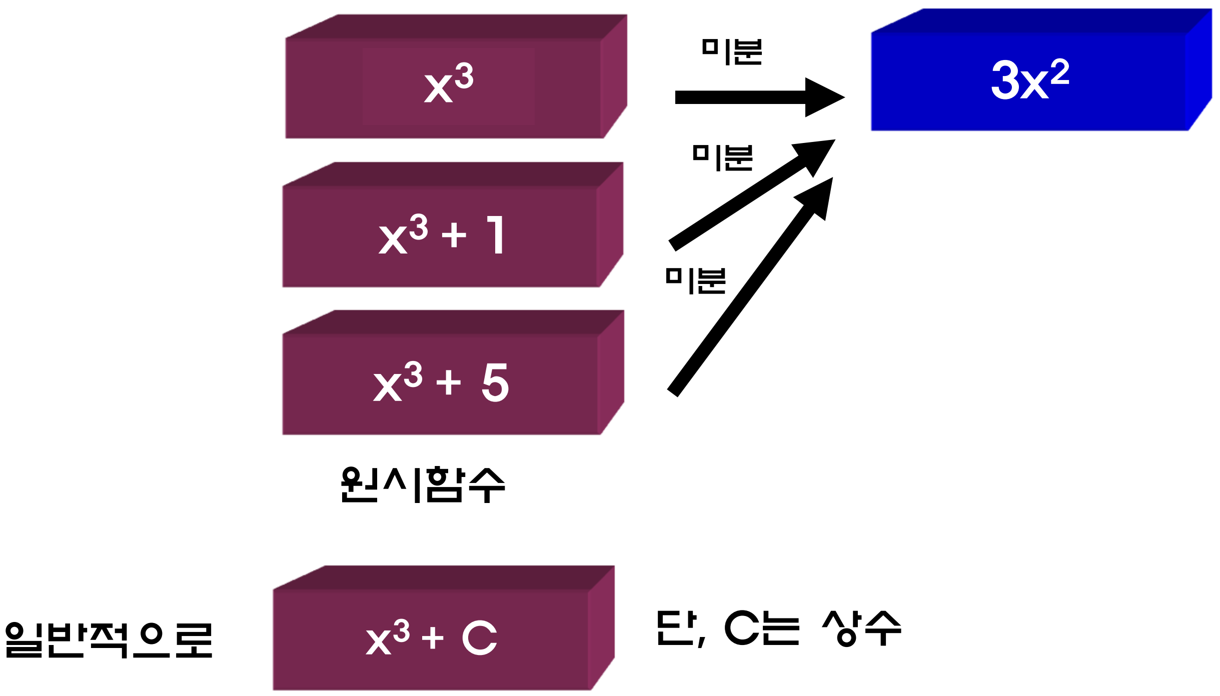
Chapter 04

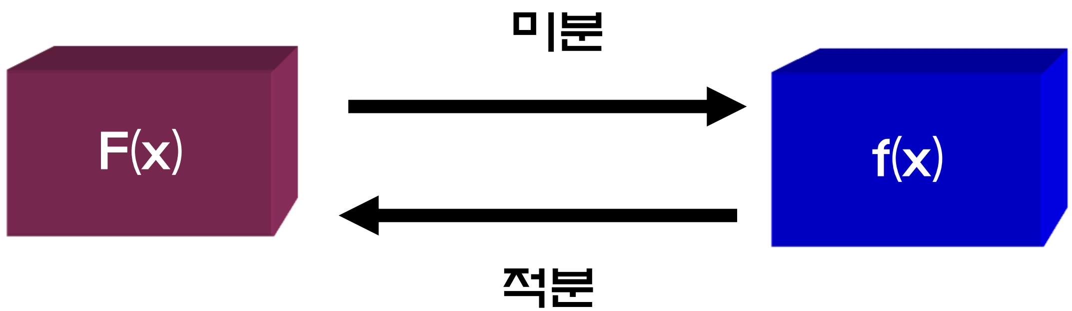
적분 (Integral)

부정적분의 개념



부정적분의 개념

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$



$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

여기서, C : 적분상수, $\int$: 적분기호, $f(x)$: 피적분함수, x : 적분변수이다.

Check 방법 : 적분한 결과(F(x))를 미분 → 피적분함수(f(x))

부정적분의 공식

(1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

(3) $\int [af(x) + bg(x)] dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

Check 방법 : 적분한 결과(F(x))를 미분 → 피적분함수(f(x))

예제 4-1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (3x^2 - 2x)\, dx$ (2) $\int (x^2 - 1)(x+1)\, dx$

solution

(1) $$\int (3x^2 + 2x)\, dx = 3\int x^2 dx + 2\int x\, dx$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right)$$

$$= x^3 + x^2 + C$$

여기서, $C = 3C_1 + 2C_2$이다. 검토 : 계산결과 미분 = 피적분함수

(2) $$\int (x^2 - 1)(x+1)\, dx = \int (x^3 + x^2 - x - 1)\, dx$$

$$= \int x^3\, dx + \int x^2 dx - \int x\, dx - \int 1\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right) + \left(\frac{1}{3}x^3 + C_2\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + C_3\right) - (x + C_4)$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

여기서, $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$이다. 검토 : 계산결과 미분 = 피적분함수 ■

참고

다음 부정적분을 구하여라.

① $\int x\sqrt{x}\,dx$ ② $\int (x^2-2x+1)\,dx$

③ $\int (x-1)^3dx - \int (x+1)^3\,dx$ ④ $\int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx$

해

① $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}\,x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}\,x^2\sqrt{x} + C$

② $\int x^2dx - 2\int x\;dx + \int dx + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$

③ $\int \{(x-1)^3 - (x+1)^3\}\,dx$

$= \int \{(x^3-3x^2+3x-1)-(x^3+3x^2+3x+1)\}\,dx$

$= \int (-6x^2-2)\,dx = -2x^3 - 2x + C$

④ $2\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2}\,dx = 2\ln x - 2\,\frac{1}{-2+1}\,x^{-2+1} + C$

$= 2\ln x + \frac{2}{x} + C$

예제 4-2 다음 부정적분 또는 도함수를 구하여라.

(1) $\int \left(\frac{d}{dx}(3x^2 - 2x) \right) dx$ (2) $\frac{d}{dx}\left(\int (e^{x^2} - 1)\, dx \right)$

solution

(1) $\int \left(\frac{d}{dx}(3x^2 - 2x) \right) dx = 3x^2 - 2x + C$

(2) $\frac{d}{dx}\left(\int (e^{x^2} - 1)\, dx \right) = e^{x^2} - 1$ ■

초월함수의 부정적분

	초월함수의 미분법	초월함수의 적분법
(1)	$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
(2)	$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
(3)	$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
(4)	$(\cot x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$
(5)	$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
(6)	$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$
(7)	$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$
(8)	$(e^x)' = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
(9)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

	초월함수의 미분법	초월함수의 적분법
(10)	$(\sinh x)' = \cosh x$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
(11)	$(\cosh x)' = \sinh x$	$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
(12)	$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$	$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C$
(13)	$(\coth x)' = -\operatorname{cosech}^2 x$	$\int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = -\coth x + C$
(14)	$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$	$\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + C$
(15)	$(\operatorname{cosech} x)' = -\operatorname{cosech} x \coth x$	$\int \operatorname{cosech} x \coth x\,dx = -\operatorname{cosech} x + C$
(16)	$(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + C$
(17)	$(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + C$
(18)	$(\sec^{-1} x)' = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\int \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1} x + C$

예제 4-3 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$ (2) $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx$ (3) $\int \frac{8^x+1}{2^x+1}\,dx$

solution

(1) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1-\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$

$1+\tan^2 x = \sec^2 x$
$1+\cot^2 x = \mathrm{cosec}^2 x$

(2) $(\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + 2\tan x\cot x + \cot^2 x = \sec^2 x + \mathrm{cosec}^2 x$ 이므로

$$\int (\tan x + \cot x)^2\,dx = \int (\sec^2 x + \mathrm{cosec}^2 x)\,dx = \tan x - \cot x + C$$

(3) $\frac{8^x+1}{2^x+1} = \frac{(2^x+1)\left((2^x)^2 - 2^x + 1\right)}{2^x+1} = 4^x - 2^x + 1$ 이므로

$(2^x)^2 = 2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$

$$\int \frac{8^x+1}{2^x+1}\,dx = \int (4^x - 2^x + 1)\,dx = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$$

■