삼각함수 미분공식

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \sec^2 x$

(4) $(\cot x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$

(5) $(\sec x)' = \sec x \tan x$

(6) $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cot x$

예제 3-11 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=\sin(x+1)$ (2) $f(x)=\sin^3 x$

(3) $f(x)=\cos(1/x)$ (4) $f(x)=\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x$

solution

(1) $u=x+1$이라 하면, $f(u)=\sin u$ 이고 $\dfrac{du}{dx}=1$, $\dfrac{df}{du}=\cos u$ 이므로

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=\cos u\cdot(1)=\cos(x+1)$$

(2) $u=\sin x$라 하면 $f(u)=u^3$ 이고 $\dfrac{du}{dx}=\cos x$, $\dfrac{df}{du}=3u^2$ 이므로

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=(3u^2)\cos x=3\sin^2 x\cos x$$

(3) $u=1/x$이라 하면, $f(u)=\cos u$ 이고 $\dfrac{du}{dx}=-1/x^2$, $\dfrac{df}{du}=-\sin u$ 이므로

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=(-\sin u)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

(4) $u=\tan x$라 하면, $f(u)=u+\dfrac{1}{3}u^3$ 이고 $\dfrac{du}{dx}=\sec^2 x$, $\dfrac{df}{du}=1+u^2$ 이므로

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=(1+u^2)\sec^2 x$$

$$=(1+\tan^2 x)\sec^2 x=\sec^2 x\sec^2 x=\sec^4 x$$

■

지수, 로그함수 미분공식

(7) $(a^x)' = a^x \ln a$

(8) $(e^x)' = e^x$

(9) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

(10) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

예제 3-12 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x) = 5e^x$ (2) $f(x) = x^2 e^x$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$ (4) $f(x) = a^{x^2}$

solution

(1) $\dfrac{df}{dx} = 5\dfrac{d}{dx}(e^x) = 5e^x$

(2) $\dfrac{df}{dx} = \left(\dfrac{d}{dx}x^2\right)e^x + x^2\left(\dfrac{d}{dx}e^x\right) = 2x\,e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)\,e^x$

(3) $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{(x)'(2^x) - x\,(2^x)'}{(2^x)^2} = \dfrac{2^x - x\,(2^x)\ln 2}{(2^x)^2} = \dfrac{1 - x\ln 2}{2^x}$

(4) $u = x^2$ 이라 하면, $f(u) = a^u$ 이고 $\dfrac{du}{dx} = 2x$, $\dfrac{df}{du} = (a^u)\ln a$ 이므로

$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx} = (a^u)\ln a\,(2x) = 2x\,a^{x^2}(\ln a)$ ■

예제 3-13

다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x)=\ln x+\log_{10}(3x)$ (2) $f(x)=\ln(\ln x)$

(3) $f(x)=(\ln x)^3$ (4) $f(x)=\log_a(\tan x)$

solution

(1) $u=3x$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=3$이고 따라서

$$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x)=\left(\frac{d}{du}\log_{10}u\right)\frac{du}{dx}=\frac{1}{u\ln 10}(3)$$

$$=\frac{3}{(3x)\ln 10}=\frac{1}{x\ln 10}$$

이다. 그러므로 $\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\ln 10}=\dfrac{1+\ln 10}{x\ln 10}$

(2) $u=\ln x$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$이고 따라서

$$\frac{d}{dx}\ln(\ln x)=\left(\frac{d}{du}\ln u\right)\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x\ln x}$$

예제 3-14

다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x) = \ln x + \log_{10}(3x)$

(2) $f(x) = \ln(\ln x)$

(3) $f(x) = (\ln x)^3$

(4) $f(x) = \log_a(\tan x)$

---

solution

(3) $u = \ln x$라 하면 $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$이고 따라서

$$\frac{d}{dx}(\ln x)^3 = \left(\frac{du^3}{du}\right)\frac{du}{dx} = 3u^2\frac{1}{x}$$

$$= \frac{3(\ln x)^2}{x}$$

(4) $u = \tan x$라 하면 $\dfrac{du}{dx} = \sec^2 x$이고 따라서

$$\frac{d}{dx}\log_a(\tan x) = \left(\frac{d}{du}\log_a u\right)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u\ln a}\sec^2 x$$

$$= \frac{\sec^2 x}{(\tan x)\ln a} = \frac{1}{(\sin x\cos x)\ln a}$$

$$= \frac{2\operatorname{cosec} 2x}{\ln a}$$

■

예제 3-15 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=a^{\sin x}$ (2) $f(x)=e^{ax}\sin bx$

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (4) $f(x)=e^{x}\ln(\sin x)$

solution

(1) $u=\sin x$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=\cos x$이고 따라서

$$\frac{d}{dx}a^{\sin x}=\left(\frac{d}{du}a^{u}\right)\frac{du}{dx}=a^{u}(\ln a)\cos x$$

$$=a^{\sin x}(\ln a)\cos x$$

(2) $$f'(x)=\left(\frac{d}{dx}e^{ax}\right)\sin bx+\left(\frac{d}{dx}\sin bx\right)e^{ax}$$

$$=ae^{ax}\sin bx+(b\cos bx)e^{ax}$$

$$=(a\sin bx+b\cos bx)e^{ax}$$

예제 3-16

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x) = a^{\sin x}$

(2) $f(x) = e^{ax}\sin bx$

(3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,)$

(4) $f(x) = e^{x}\ln(\sin x)$

solution

(3) $u = x^2+1$이라 하면 $\dfrac{du}{dx} = 2x$이고 따라서 $v = x + \sqrt{x^2+1}$이라 하면

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \left(\frac{d}{du}\sqrt{u}\right)\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

그러므로

$$\frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2+1}\,) = \left(\frac{d}{dv}\ln v\right)\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

예제 3-17

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x) = a^{\sin x}$

(2) $f(x) = e^{ax} \sin bx$

(3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

(4) $f(x) = e^x \ln(\sin x)$

solution

(4) $u = \sin x$라 하면 $\dfrac{du}{dx} = \cos x$이고 따라서

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \left(\frac{d}{du}\ln u\right)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

그러므로

$$f'(x) = \left(\frac{d}{dx}e^x\right)\ln(\sin x) + e^x\left(\frac{d}{dx}\ln(\sin x)\right)$$

$$= e^x \ln(\sin x) + e^x \cot x$$

$$= e^x(\ln(\sin x) + \cot x)$$

■

쌍곡선함수 미분공식

$$(11)\quad (\sinh x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(12)\quad (\cosh x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(13)\quad (\tanh x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \mathrm{sech}^2 x$$

$$(14)\quad (\coth x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) = -\mathrm{cosech}^2 x \qquad (x \neq 0)$$

$$(15)\quad (\mathrm{sech}\, x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cosh x}\right) = -\mathrm{sech} x \tanh x,$$

$$(16)\quad (\mathrm{cosech}\, x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh x}\right) = -\mathrm{cosech} x \coth x \qquad (x \neq 0)$$

예제 3-18 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\sinh(2x^2+x)$ (2) $y=\cosh(\cos(2x+1))$

solution

(1) $u=2x^2+x$ 라 하면 $\dfrac{du}{dx}=4x+1$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\left(\frac{d}{du}\sinh u\right)\left(\frac{d}{dx}(2x^2+x)\right)$$

$$=\cosh u\,(4x+1)=(4x+1)\cosh(2x^2+x)$$

(2) $v=2x+1$, $u=\cos v$ 라 하면 $\dfrac{dv}{dx}=2$, $\dfrac{du}{dv}=-\sin v$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}=\left(\frac{d}{du}\cosh u\right)\left(\frac{d}{dv}\cos v\right)\left(\frac{d}{dx}(2x+1)\right)$$

$$=\sinh u\cdot(-\sin v)\cdot(2)=-2\sin(2x+1)\sinh(\cos(2x+1))$$ ■

역삼각함수 미분공식

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

(17) $$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

(18) $$\frac{d}{dx}\mathrm{cosec}^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

(19) $$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2}$$

예제 3-19 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}5x$ (2) $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}(\ln x)$

solution

(1) $u=5x$ 라 하면 $\dfrac{du}{dx}=5$ 이고 따라서 연쇄법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}5x=\frac{d}{du}\sin^{-1}u\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot(5)$$

$$=\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

(2) $u=\ln x$ 라 하면 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$ 이고 따라서 연쇄법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\ln x)=\frac{d}{du}\sin^{-1}u\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

예제 3-20

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(3) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}2x$ (4) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(e^x)$

solution

(3) $u=2x$ 라 하면 $\dfrac{du}{dx}=2$ 이고 따라서 연쇄법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}2x=\frac{d}{du}\cos^{-1}u\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot 2=-\frac{a}{\sqrt{1-4x^2}}$$

(4) $u=e^x$ 이라 하면 $\dfrac{du}{dx}=e^x$ 이고 따라서 연쇄법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(e^x)=\frac{d}{du}\cos^{-1}u\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot e^x=-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

예제 3-21 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(5) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}3x$ (6) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(\ln x)$

solution

(5) $u=3x$ 라 하면 $\dfrac{du}{dx}=3$ 이고 따라서 연쇄법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}3x=\frac{d}{du}\tan^{-1}u\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{1+u^2}\cdot 3=\frac{3}{1+9x^2}$$

(6) $u=\ln x$ 이라 하면, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$ 이고 따라서 연쇄법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\ln x)=\frac{d}{du}\tan^{-1}u\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{1+u^2}\,\frac{1}{\mathrm{l}}\,X=\cdot\,X\,\frac{1}{\mathrm{ln}\,[1+(\ln x)^2]}$$

■

3.4 고계도함수

■ 1계 도함수(second derivative) :

$f'(x)$

■ 2계 도함수 :

$$y'', \ f''(x), \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \frac{d^2f}{dx^2}, \ \frac{d^2}{dx^2}f(x), \ D_x^2 f(x)$$

■ 3계 도함수 :

$$y''', \ f'''(x), \ \frac{d^3y}{dx^3}, \ \frac{d^3f}{dx^3}, \ \frac{d^3}{dx^3}f(x), \ D_x^3 f(x)$$

■ n 계 도함수

$$y^{(n)}, \ f^{(n)}(x), \ \frac{d^ny}{dx^n}, \ \frac{d^nf}{dx^n}, \ \frac{d^n}{dx^n}f(x), \ D_x^n f(x)$$

■ 2계 이상의 도함수를 통칭 고계 도함수(higher derivative)라 한다.

예제 3-22 다음 함수의 2계 도함수를 구하여라.

(1) $f(x) = \sin x$ (2) $f(x) = e^{2x}$

solution

(1) $y' = \dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x\,,\ y'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\sin x\right) = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

(2) $y' = \dfrac{d}{dx}e^{2x} = 2e^{2x}\,,\ y'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}e^{2x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(2e^{2x}\right) = 4e^{2x}$ ■

예제 3-23 함수 $y=e^{ax}\sin bx\ (b\neq 0)$에 대하여,

(1) y'과 y''을 구하여라.

(2) $y''-2y'+2y=0$을 만족하는 상수 a와 b를 구하여라.

solution

(1) $y'=(e^{ax})'\sin bx+e^{ax}(\sin bx)'=ae^{ax}\sin bx+e^{ax}(b\cos bx)'$

$$=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$$

$$y''=(e^{ax})'(a\sin bx+b\cos bx)+e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)'$$

$$=(ae^{ax})(a\sin bx+b\cos bx)+e^{ax}(ab\cos bx-b^2\sin bx)$$

$$=e^{ax}\left[(a^2\sin bx+ab\cos bx)+(ab\cos bx-b^2\sin bx)\right]$$

$$=e^{ax}\left[(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\right]$$

예제 3-24

함수 $y=e^{ax}\sin bx\ (b\neq 0)$에 대하여,

(1) y'과 y''을 구하여라.

(2) $y''-2y'+2y=0$을 만족하는 상수 a와 b를 구하여라.

---

solution

(2) (1)에서 구한 y'과 y''을 $y''-2y'+2y=0$에 대입하면

$$0=y''-2y'+2y$$

$$=e^{ax}\left[\,(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\,\right]-2e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)+2e^{ax}\sin bx$$

$$=e^{ax}\left[\,(a^2-b^2-2a+2)\sin bx+2(a-1)b\cos bx\,\right]$$

이다. 한편 $e^{ax}\neq 0$이므로

$$(a^2-b^2-2a+2)\sin bx+2(a-1)b\cos bx=0$$

그리고 $b\neq 0$에 대하여 위의 항등식이 성립하기 위하여

$$a^2-b^2-2a+2=0\,,\ \ 2(a-1)b=0$$

이다. 이때 $b\neq 0$이므로

$$a^2-b^2-2a+2=0\,,\ \ a-1=0$$

따라서 $a=1$이고, $1-b^2=0$ 즉 $b=1$ 또는 $b=-1$을 얻는다. 그러므로 구하고자 하는 상수 a와

b는 $a=1,\ b=-1$ 또는 $a=1,\ b=1$이다. ■

$$y = \sin x$$
$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin[(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}] = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$
$$y''' = \cos(x + 2\frac{\pi}{2}) = \sin[(x + 2\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}] = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$$

중요함수의 고계도함수

$$f(x) = \sin x \quad \longrightarrow \quad y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \cos x \quad \longrightarrow \quad y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

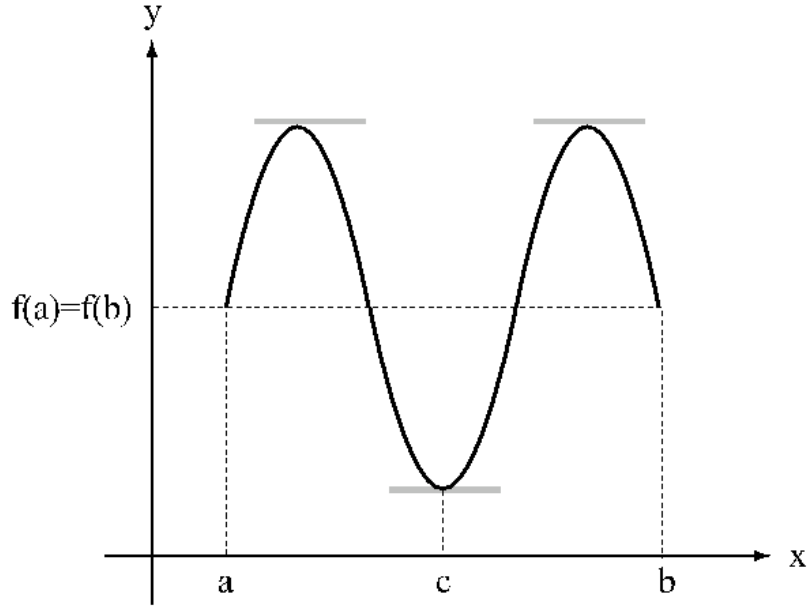
$$f(x) = x^m \quad \longrightarrow \quad y^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n)x^{m-n}, & n < m \\ m!, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

$$f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad y^{(n)} = e^x$$

Roll의 정리

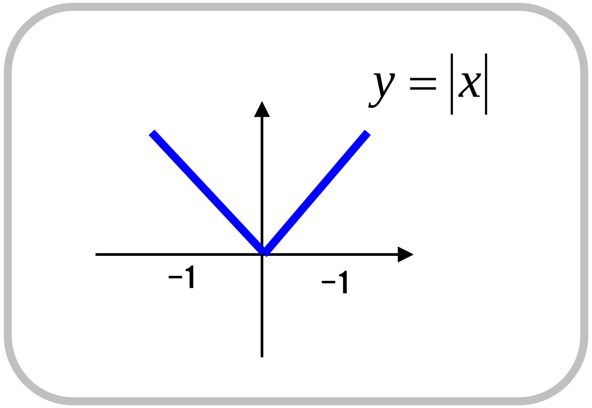
함수 $f(x)$가 ① 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, ② 개구간 (a, b)에서 미분가능하며,
③ $f(a) = f(b)$를 만족하면, $f'(c) = 0$을 만족하는 c가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.

즉, "기울기가 0인 c점이 하나 이상 존재한다" 는 의미



Rolle의 정리

Roll 정리 만족하지 않는 예 1

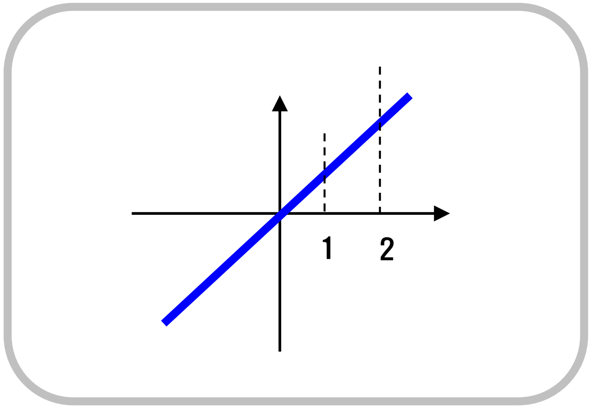


3 f(−1) = f(1) = 1 이고

1 폐구간[−1, 1]에서 연속이지만,

2 개구간 (−1,1)에서 x=0에서 미분불가

Roll 정리 만족하지 않는 예 2



폐구간[1, 2]에서 연속이고

개구간 (1,2)에서 미분가능 하지만

$f(1) \neq f(2)$

평균값 정리

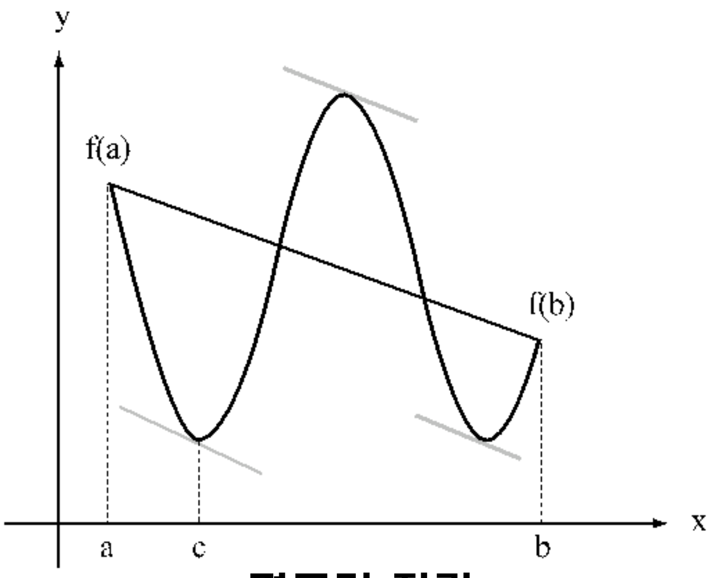
1 2

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분가능하면,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

를 만족하는 c가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.

즉, "a, b를 연결하는 기울기와 같은 점이 구간 내에 하나 이상 존재한다" 는 의미



평균값 정리

예제 3-25 폐구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)=x^2+2x-3$에 평균값 정리를 만족하는 c를 구하여라.

solution

$f(x)=x^2+2x-3$은 폐구간 $[-2, 3]$에서 연속이고 개구간 $(-2, 3)$에서 미분가능하므로

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{12-(-3)}{5}=3$$

을 만족하는 c가 개구간 $(-2, 3)$ 안에 적어도 하나 존재한다. 한편 $f'(x)=2x+2$이므로

$$f'(c)=2c+2=3$$

으로부터 $c=1/2$이다. ■

평균값 정리로부터 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (a<c<b)$ 즉,

$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)\ (a<c<b)$

$b=a+h$ 와 $\theta=\dfrac{c-a}{b-a}$ $(0<\theta<1)$이라 하면

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$

따라서 $h\fallingdotseq 0$일 때, $f(a+h)$의 근사값은 $f(a+h)\fallingdotseq f(a)+hf'(a)$

그러면 $x\fallingdotseq 0$일 때, 기본 함수에 대한 근사값

(1) $(1+x)^n \fallingdotseq 1+nx$

(2) $\sin x \fallingdotseq x$

(3) $\cos x \fallingdotseq 1$

(4) $e^x \fallingdotseq 1+x$

(5) $\ln(1+x) \fallingdotseq x$

예제 3-26 다음 식에 대한 근사값을 구하여라.

(1) $\sqrt[3]{1.001}$ (2) $\ln(0.91)$

solution (1) 함수 $f(x)=\sqrt[3]{x}$를 생각하자. 그러면 $f'(x)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$이므로 $a=1$, $h=0.001$

이라 하면, 구하고자 하는 근사값은 다음과 같다.

$$\sqrt[3]{1.001}=f(1+0.001)\fallingdotseq f(1)+(0.001)f'(1)$$

$$=\sqrt[3]{1}+(0.001)\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{1}}\fallingdotseq 1+0.0003=1.0003$$

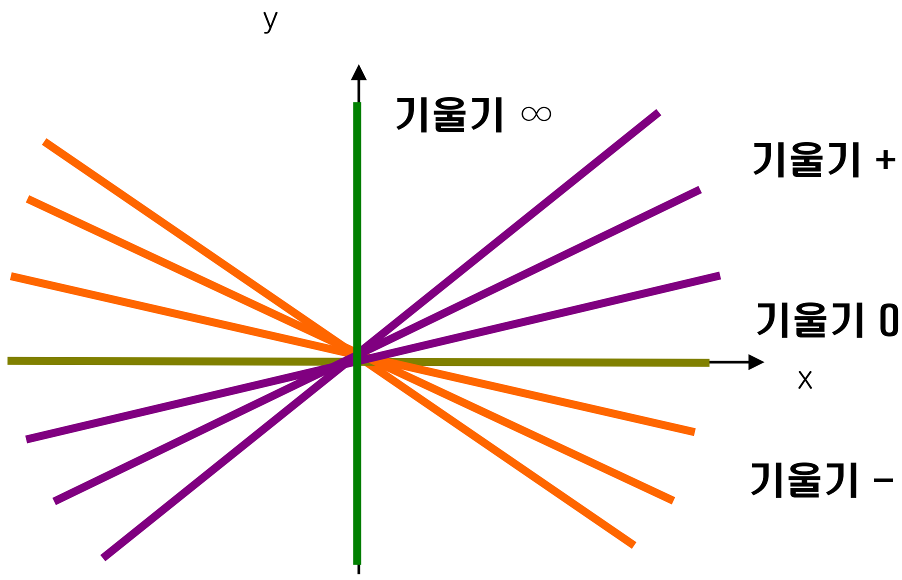
(2) 함수 $f(x)=\ln x$를 생각하자. 그러면 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $a=1$, $h=-0.09$라 하면,

$$\ln(0.91)=f(1-0.09)\fallingdotseq f(1)+(-0.09)f'(1)$$

$$=\ln 1+(-0.09)\frac{1}{1}$$

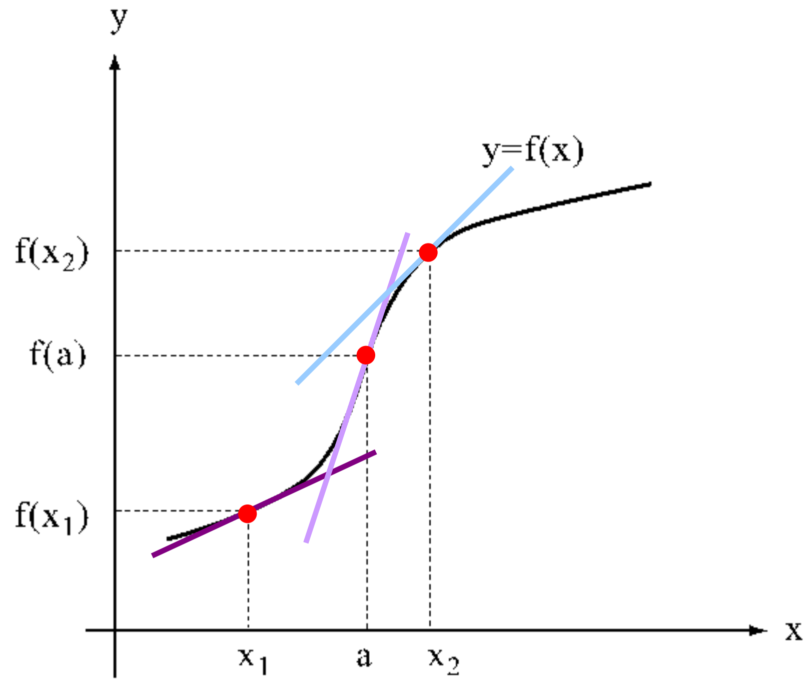
$$\fallingdotseq 0-0.09=-0.09$$ 이다. ■

양의 기울기, 음의 기울기



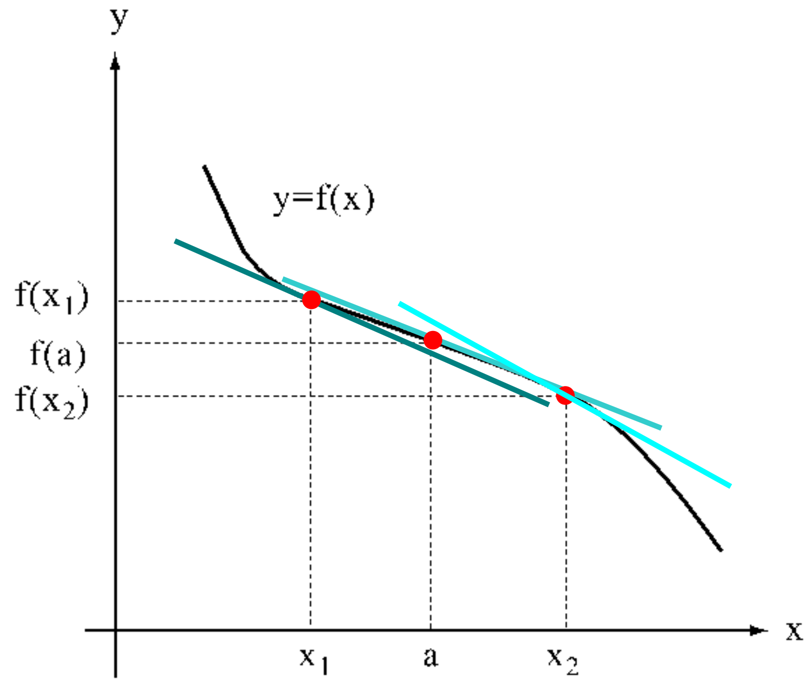
증가상태, 감소상태

접선의 기울기 항상 + → 증가상태



증가상태

접선의 기울기 항상 – → 감소상태



감소상태

정리 7

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능할 때,

(1) $f'(a)>0$이면, $f(x)$가 $x=a$에서 증가상태이고

(2) $f'(a)<0$이면, $f(x)$가 $x=a$에서 감소상태이다.

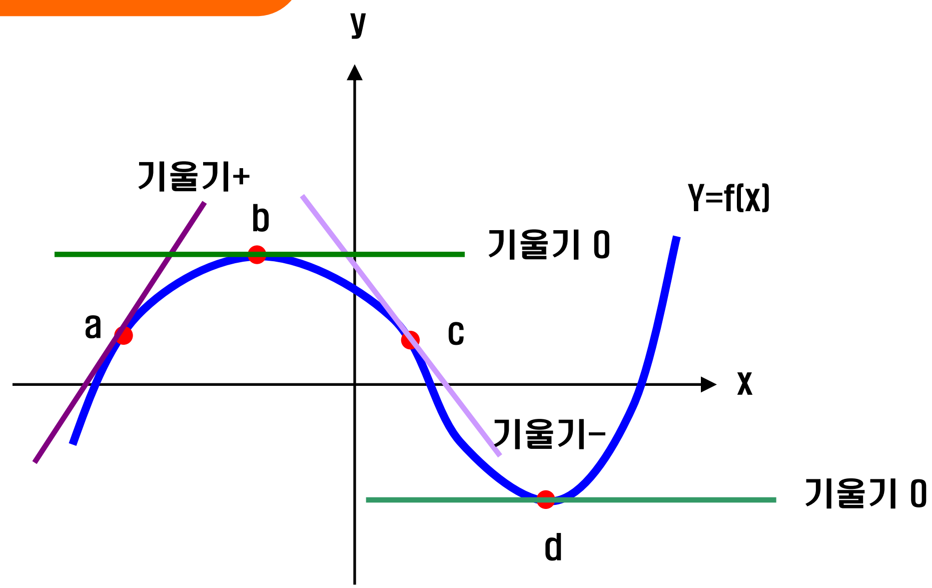
예제 3-27 함수 $f(x)=x^2+2x-3$에 대하여 증가상태와 감소상태에 있는 점들의 집합을 구하여라.

---

solution

$f'(x)=2x+2$이므로 $x<-1$이면 $f'(x)<0$이고, $x>-1$이면 $f'(x)>0$이다. 따라서 감소상태에 있는 점들의 집합은 $\{x : x<-1\}$이고, 증가상태에 있는 점들의 집합은 $\{x : x>-1\}$이다. ■

극대, 극소와 미분



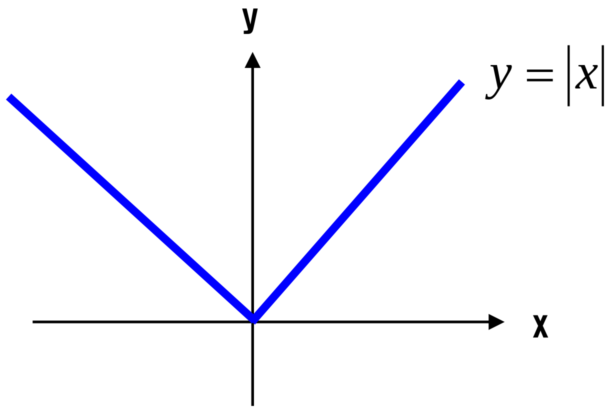
- 기울기 + → 함수(그래프)는 증가상태
- 기울기 – → 감소상태
- 기울기 0 → 극대(값), 극소(값)
- 점 b, d : 극점(extreme value), 임계점(critical value)

정리 8

함수 $f(x)$가 개구간 I에서 연속이고 이 구간 안의 한 점 $x=a$에서 극값을 갖는다면,

(1) $f'(a)=0$이거나

(2) $f'(a)$가 존재하지 않는다.



(2)의 예 : x=0에서 극소값을 가지지만 x=0에서 "미분 가능하지 않다"

즉, f'(0)이 존재하지 않는다.

정리 9

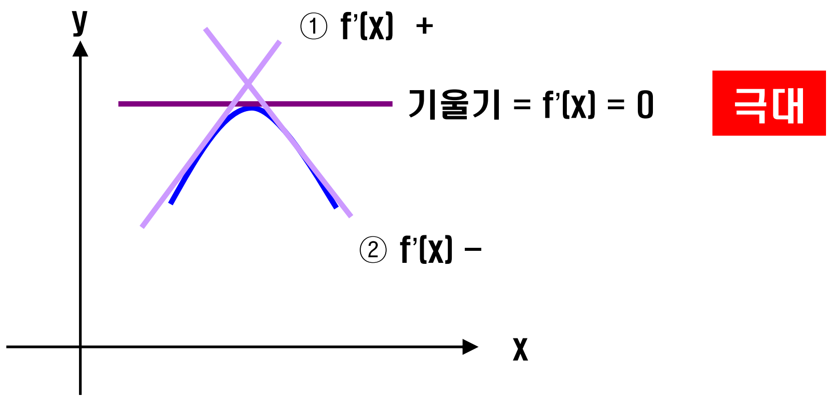
함수 $f(x)$가 임계점 $x=a$를 포함하는 적당한 개구간 I에서 미분가능하다고 하자.
(이때 $f'(a)$가 존재하지 않아도 무방하다.)

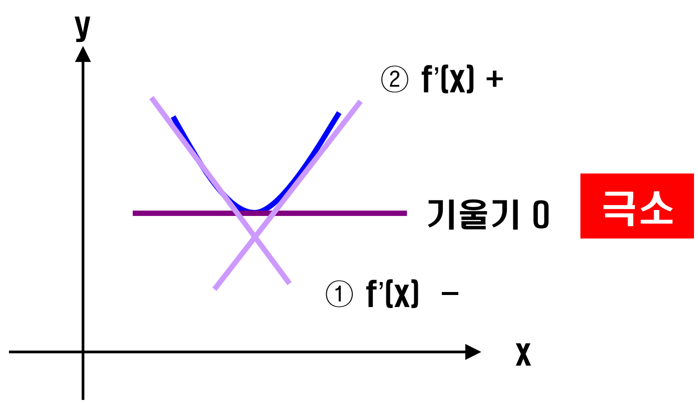
(1) x가 a를 지날 때 $f'(a)$의 부호가 "+"에서 "-"로 변하면, 극대값 $f(a)$를 가지며

(2) x가 a를 지날 때 $f'(a)$의 부호가 "-"에서 "+"로 변하면, 극소값 $f(a)$를 갖는다.

(3) x가 a를 지날 때 $f'(a)$의 부호에 변화가 없으면, $f(a)$는 극값이 아니다.

● **임계점이 극대값인지 극소값인지 판별하는 방법**





예제 3-28

다음 함수의 극값을 조사하여라.

(1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ (2) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 10$

solution

(1) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ 이므로 임계점은

$f'(x) = 0$; $6(x-1)(x-2) = 0$; $x = 1$ 또는 $x = 2$ 이다.

따라서 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	극대 4	↓	극소 3	↑

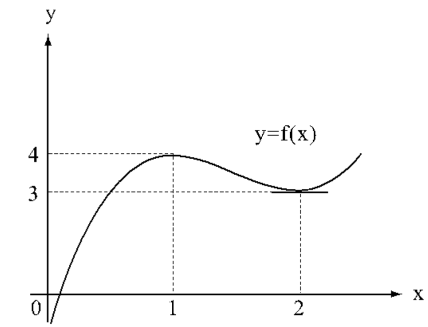


그림 3.7

(2) $f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x+2)(x-1)$ 이므로 임계점은

$f'(x) = 0$; $(x+2)(x-1) = 0$; $x = -2$ 또는 $x = 1$ 이다.

따라서 증감표를 작성하면, 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↓	극소 -10	↑	극대 17	↓

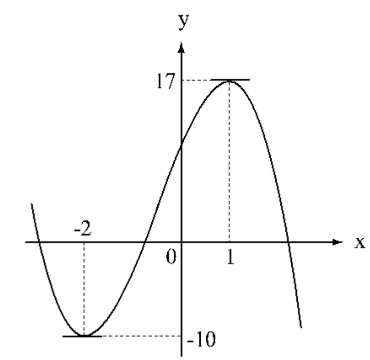
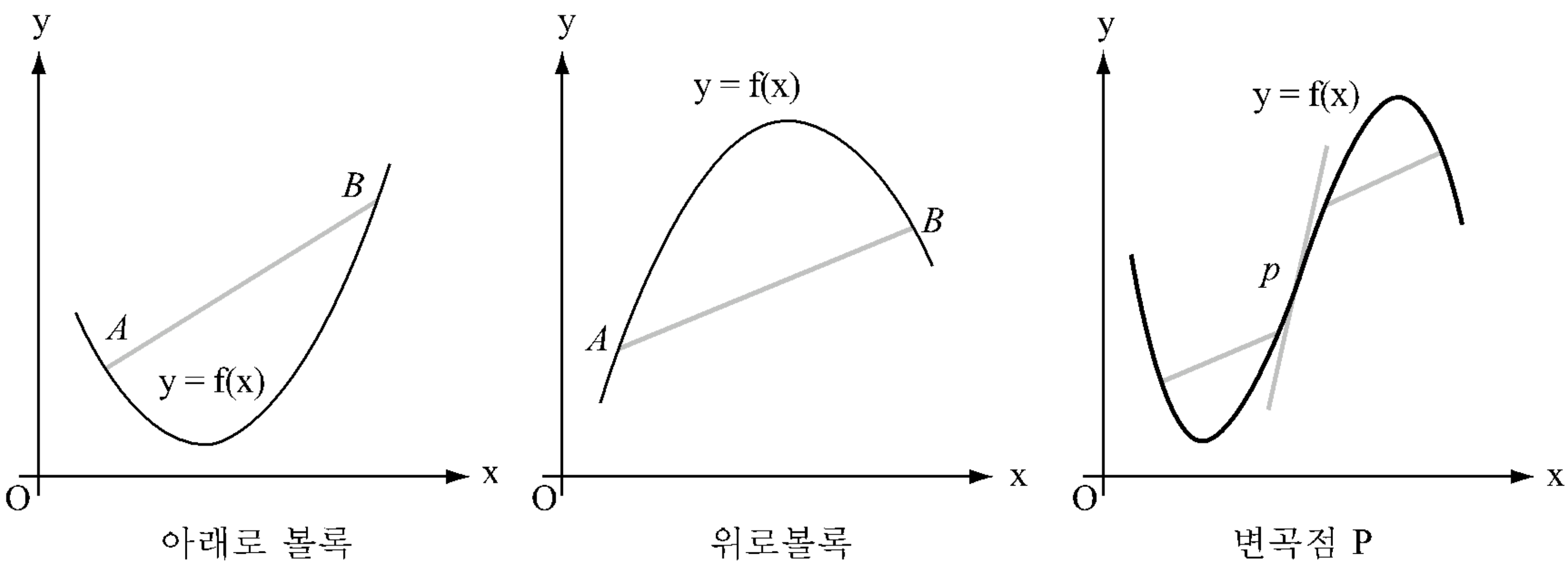


그림 3.8



곡선의 요철