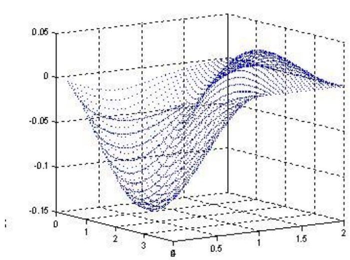
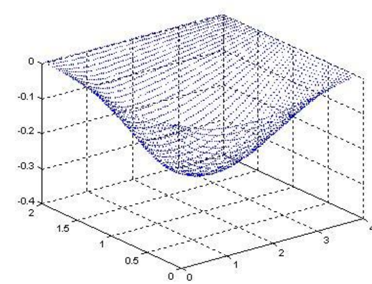
Chapter 03

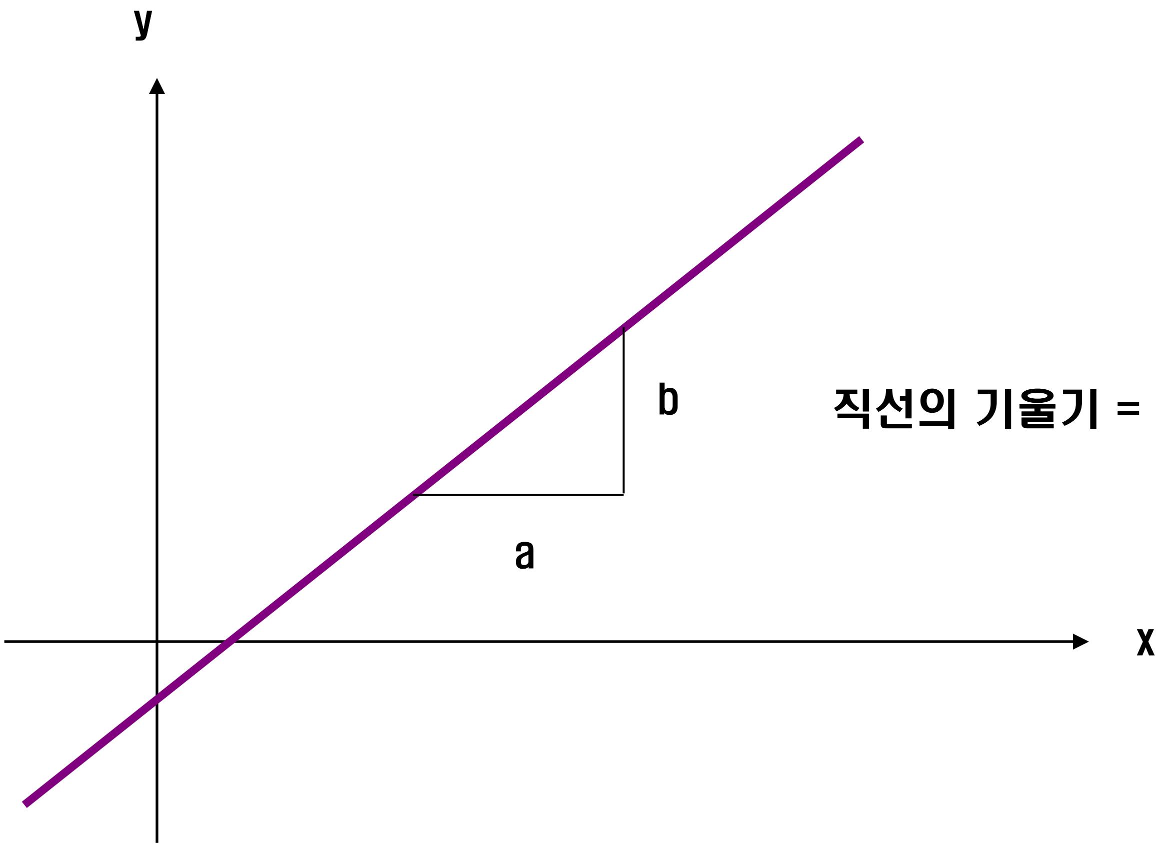
도함수 (Derivative)



19

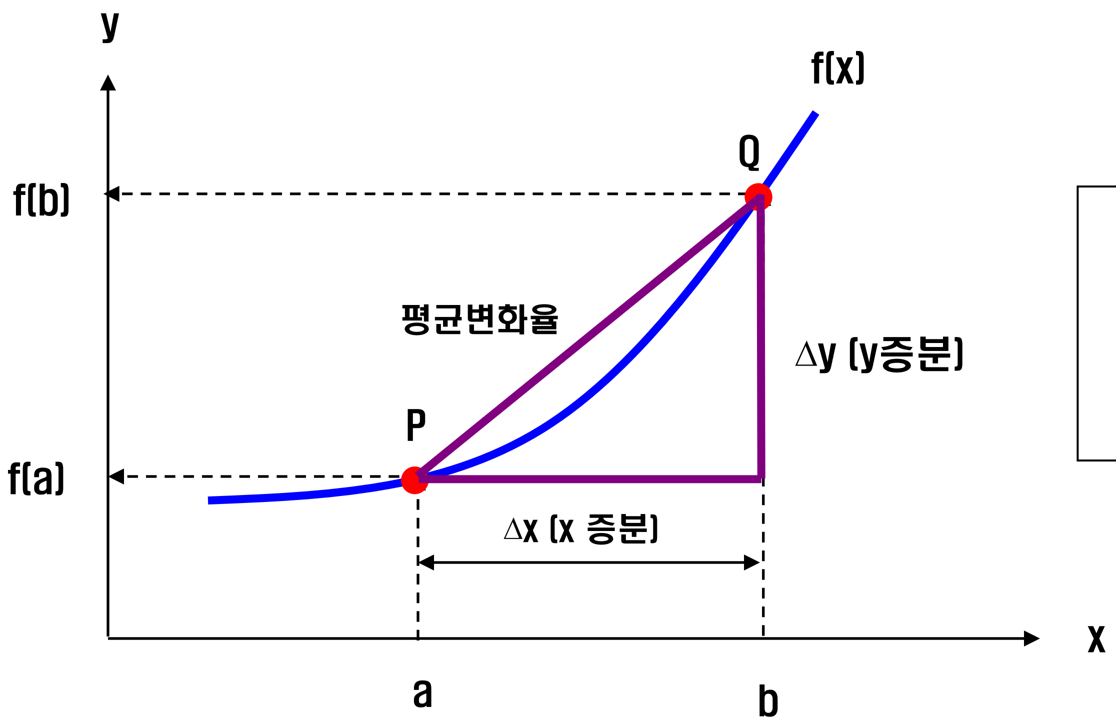


● 직선의 기울기 또는 변화율



직선의 기울기 = $\dfrac{b}{a}$

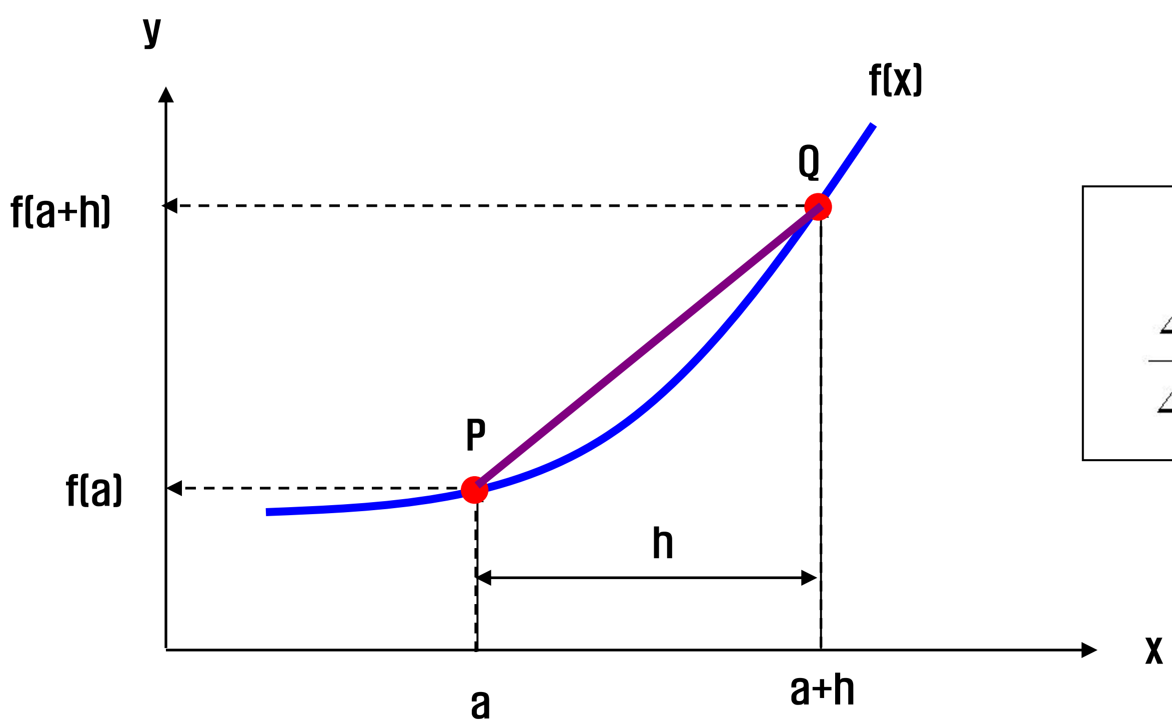
● 함수의 평균변화율 (1)



평균변화율 =

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

● 함수의 평균변화율 (2)

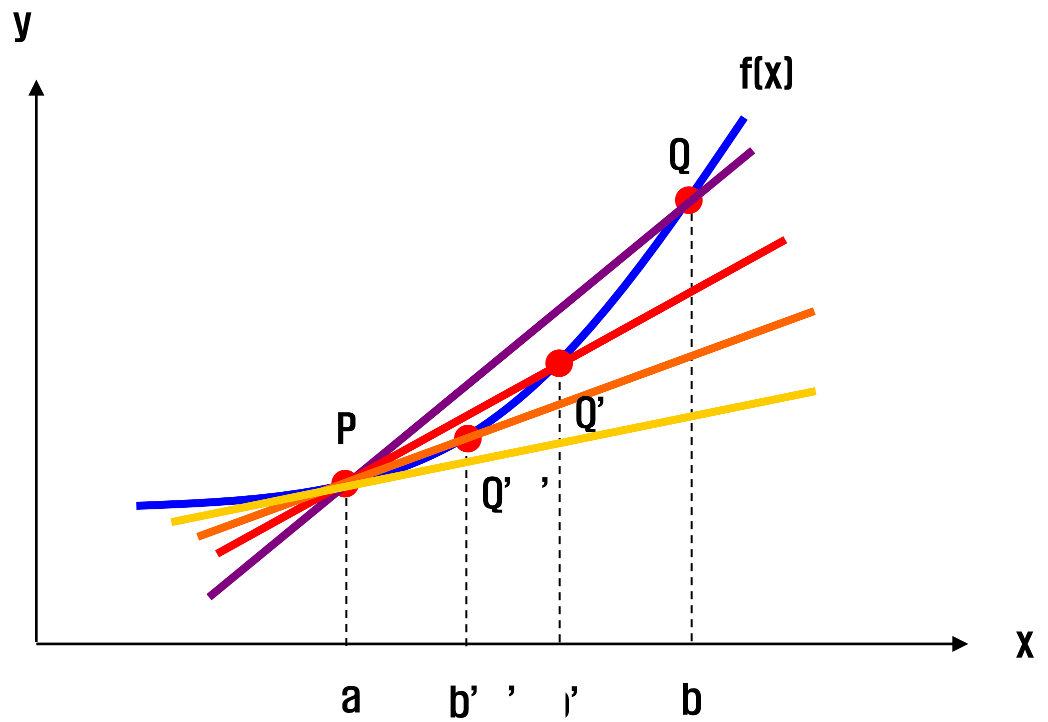


평균변화율 =

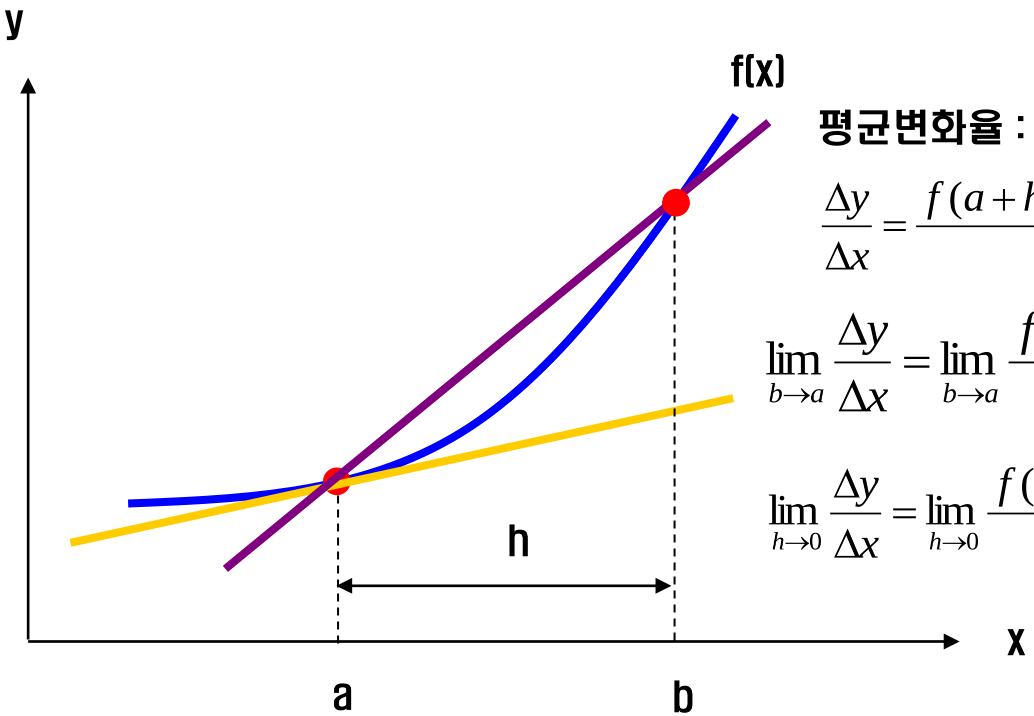
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3.1 미분계수와 도함수 (differential coefficient & derivative)

- 함수의 순간변화율 (= 미분계수)



- **함수의 순간변화율 (= 미분계수)**



평균변화율 : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

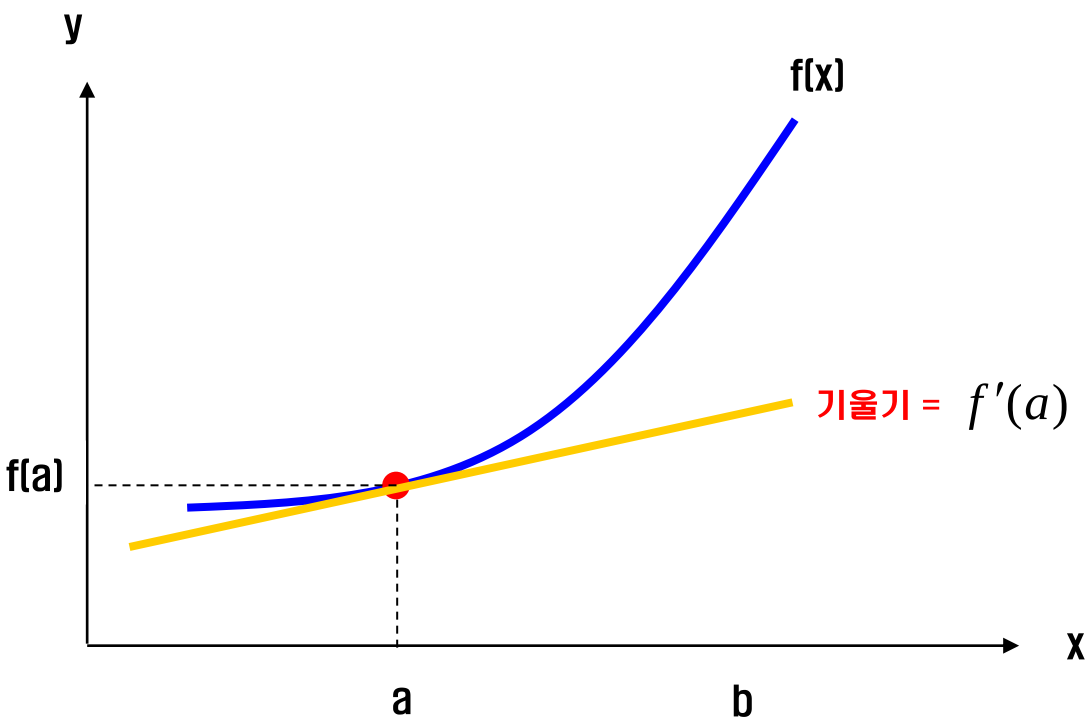
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{b \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$: x=a 에서의 순간변화율, 미분계수, 접선의 기울기

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\boxed{f'(a)}$$

● 접선의 방정식



직선의 일반형 y =mx + n (1)

조건1 : m = $f'(a)$

조건2 : x=a 일 때 y = f(a)

조건2를 식(1)에 대입하면

f(a) = f’ (a)a + n

정리하면

n = f(a) – f’ (a)a

● 위의 m, n을 대입하면

y = f’ (a)x + f(a) – f’ (a)a

정리하면

y = f’ (a) (x−a) + f(a)

예제 3-1

함수 $f(x)=x^2$ 에 대하여

(1) 폐구간 $[1,3]$에서 평균변화율을 구하여라.

(2) $x=1$에서 미분계수를 구하여라.

(3) 곡선 위의 점 $(1,1)$에서 접선의 방정식을 구하여라.

---

solution

(1) $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(3)^2-(1)^2}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

(2) 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2)=2$$

(3) $y-f(1)=f'(1)(x-1)=2(x-1)$이므로 접선의 방정식은

$y=2(x-1)+1=2x-1$이다.

■ 좌미분계수와 우미분계수

좌미분계수 : $f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

우미분계수 : $f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

■ 미분계수 $f'(a)$가 존재하기 위한 조건

① $x = a$에서 좌측미분계수와 우측미분계수가 모두 존재

② $f'_-(a) = f'_+(a)$

예제 3-2 함수 $f(x)=|x|$에 대하여 $x=0$에서 미분계수가 존재하는지 살펴보아라.

solution

좌미분계수는

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1$$

이고 우미분계수는

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1$$

이다. 따라서 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$이므로 $x=0$에서 미분계수가 존재하지 않는다. ■

■ $f(x)$의 미분(=도함수)

임의의 x에 대하여 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

■ y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $D_x f(x)$

■ 미분한다 = $f'(x)$를 구한다

예제 3-3 함수 $f(x)=x^3$ 에 대하여

(1) 도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하여라.

(2) $x=1$에서 미분계수를 구하여라.

solution

(1) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

(2) $$f'(1)=3x^2\Big|_{x=1}=3$$

■

예제 3-4

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (2) $f(x)=\sqrt{x}$

solution

(1) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

(2) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ ■

미분공식 1

(1) $f(x) = k$ 이면 $f'(x) = 0$

(2) $f(x) = x^n$ 이면 $f'(x) = n\,x^{n-1}$

예제 3-5 함수 $f(x) = x^{7/3}$ 의 도함수를 구하여라.

solution

$$f'(x) = \frac{7}{3}x^{4/3}$$

미분공식 2

(1) $[k\,f(x)]' = k\,f'(x)$

(2) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

(3) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(4) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0)$

예제 3-6 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2$

(2) $f(x) = x^2 + 3x - 6$

(3) $f(x) = (x^2 - x + 2)(x^3 - 2x^2 - 1)$

(4) $f(x) = (x^3 + x)\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$

solution

예제 3-7 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2$

(2) $f(x) = x^2 + 3x - 6$

(3) $f(x) = (x^2 - x + 2)(x^3 - 2x^2 - 1)$

(4) $f(x) = (x^3 + x)\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$

solution

(1) $f'(x) = 5x^4 + 9x^2$

(2) $f'(x) = (x^2 + 3x - 6)' = (x^2)' + (3x)' + (-6)' = 2x + 3$

(3)
$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - x + 2)'(x^3 - 2x^2 - 1) + (x^2 - x + 2)(x^3 - 2x^2 - 1)' \\ &= (2x - 1)(x^3 - 2x^2 - 1) + (x^2 - x + 2)(3x^2 - 4x) \\ &= (2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + (3x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 8x) \\ &= 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 10x + 1 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 + x)'\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + (x^3 + x)\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' \\ &= (3x^2 + 1)\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + (x^3 + x)\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(3x^4 + x^2 + 3x + \frac{1}{x}\right) + \left(2x^4 + 2x^2 - x - \frac{1}{x}\right) = 5x^4 + 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

■

예제 3-8 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}$

solution

(1) $f(x)=x^{-2}$ 이므로 $f'(x)=(x^{-2})'=(-2)x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$

(2) $f(x)=x^{2/3}+3x^{1/2}$ 이므로

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}+3\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

■

미분공식 3 (합성함수 미분법)

두 함수 $y=f(u)$와 $u=g(x)$가 미분가능하면, $y=f(g(x))$도 미분가능하고, 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))\,g'(x)$$

예제 3-9 $f(x)=(2x^2-x+3)^{10}$을 미분하여라.

solution

$u=2x^2-x+3$이라 하면, $\dfrac{du}{dx}=4x-1$이고 $f(u)=u^{10}$이다. 그러므로

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=10u^9(4x-1)=10(4x-1)(2x^2-x+3)^9$$

■

미분공식 4 (역함수 미분법)

미분가능한 함수 $y=f(x)$가 역함수 $x=f^{-1}(y)$를 가지면, 역함수도 미분가능하고, 다음이 성립한다.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} \quad \text{단, } \frac{dy}{dx}\neq 0$$

예제 3-10 $x=\sqrt{1-y}$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

solution

$u=1-y$라 하면 $\dfrac{du}{dy}=-1$이고, $x=\sqrt{u}$ 이므로

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{u}}(-1)=-\frac{1}{2\sqrt{1-y}}=-\frac{1}{2x}$$

따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\dfrac{1}{2x}}=-2x$$

■