예제 2-10 다음 함수의 주기와 진폭을 구하고, 최대값과 최소값을 구하여라.

(1) $y = \frac{1}{3}\sin 2x$ (2) $y = 2\sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{2}\right)$

solution

(1) 주기 : $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 진폭 : $\frac{1}{3}$, 최대값 : $\frac{1}{3}$, 최소값 : $-\frac{1}{3}$

(2) 주기 : $\frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$, 진폭 : 2, 최대값 : 2, 최소값 : -2

우함수, 기함수

우함수(even function)

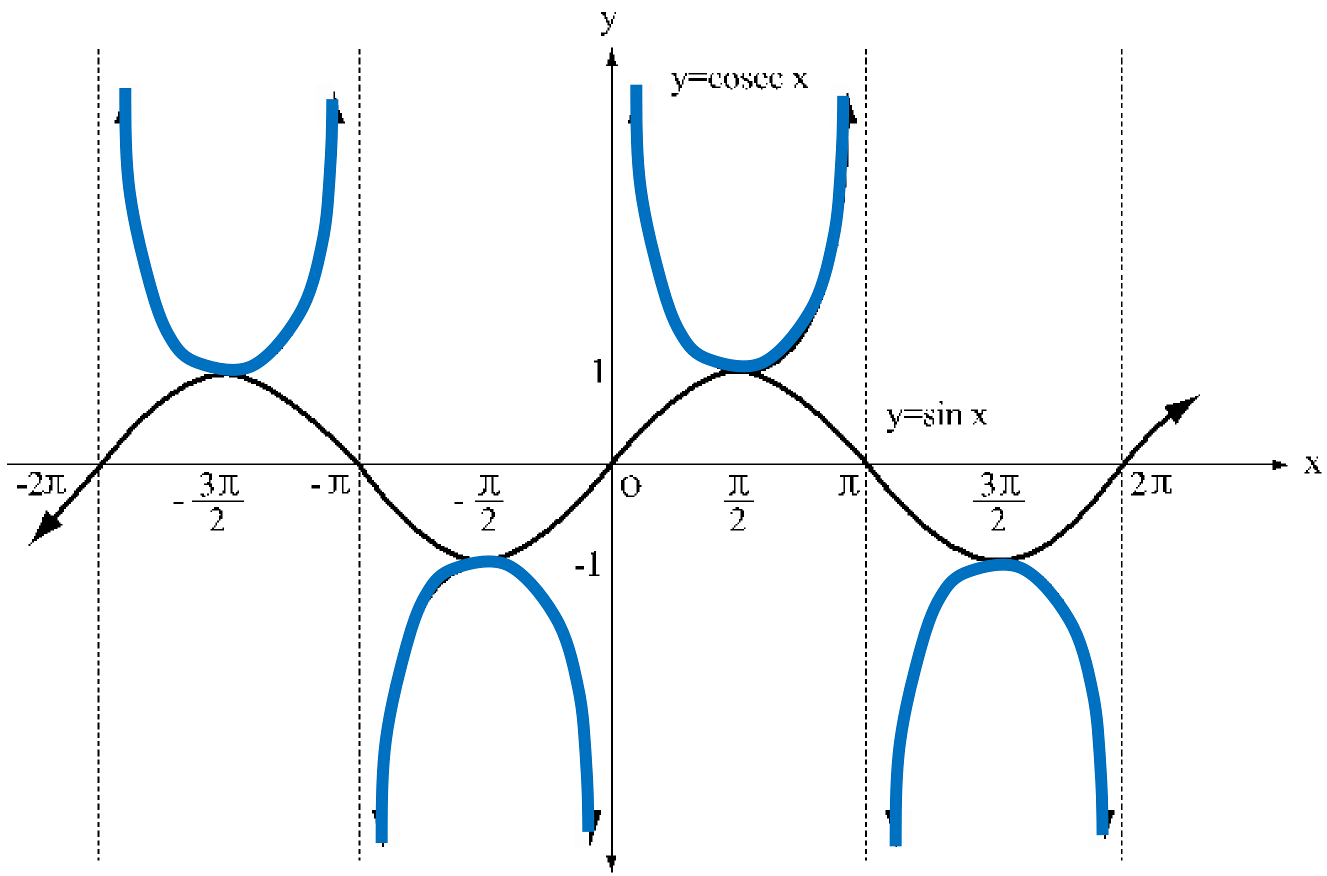
$f(x) = f(-x)$: y축에 대하여 대칭인 함수

예 : $y = \cos x$

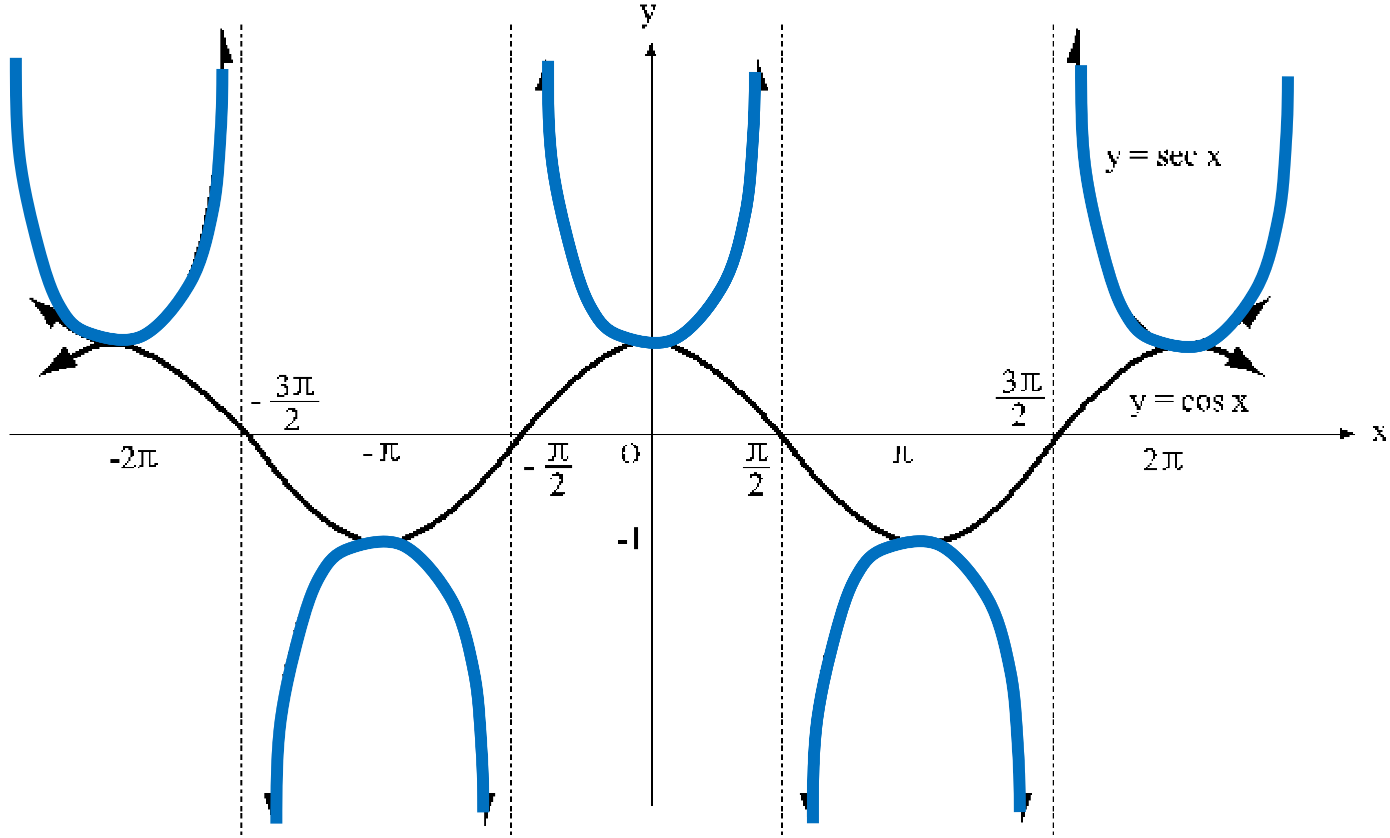
기함수(odd function)

$f(-x) = -f(x)$: 원점에 대하여 대칭인 함수

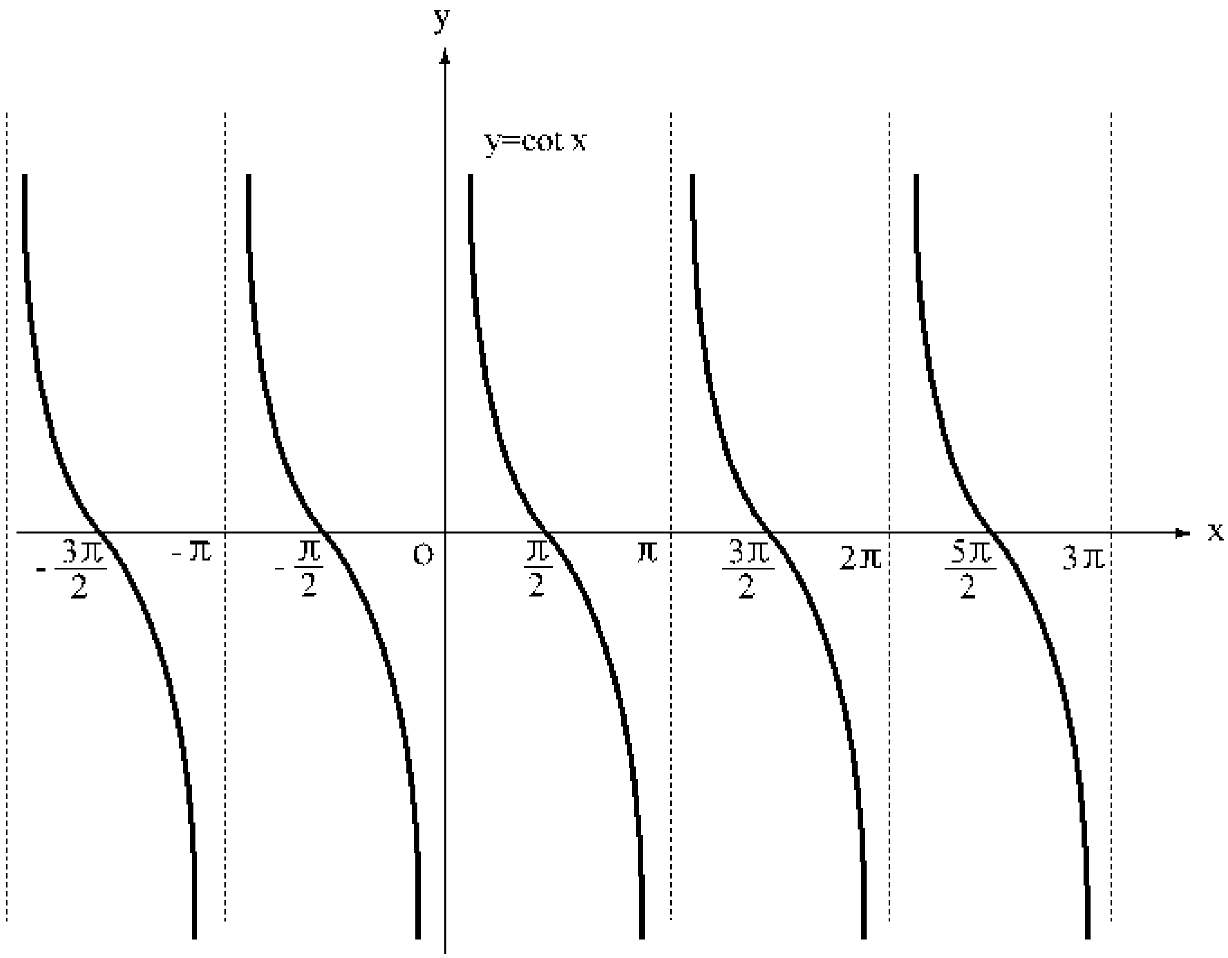
예 : $y = \sin x$ 와 $y = \tan x$



y = cosec x의 그래프


y
y = sec x
y = cos x
x
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
-π
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
-1

y = sec x의 그래프


y
y=cot x
x
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π

y = cot x의 그래프

삼각함수 공식

삼각함수의 덧셈정리 (addition theorem)

(7) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(8) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(9) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(10) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(11) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(12) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

삼각함수의 반각 공식 (formula of half angle)

(식 (14)로부터)

(16) $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2} \quad\rightarrow\quad \sin(\beta/2)=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

(17) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2} \quad\rightarrow\quad \cos(\beta/2)=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

(18) $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha} \quad\rightarrow\quad \tan(\beta/2)=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

삼각함수의 배각 공식 (formula of multiple angle)

(덧셈정리 (7), (9), (11)에서 $\alpha=\beta$라 하면)

(13) $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

(14) $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(15) $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 이므로 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

삼각함수의 곱을 합차로 변형하는 공식

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (7)$$

$$+\mid \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad (8)$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

그러므로 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

동일한 방법에 의하여

(19) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

(20) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

(21) $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

삼각함수의 합차를 곱으로 변형하는 공식

(식 (22)~(25)로부터)

(22) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(23) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

(24) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(25) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

예제 2-11 $\sin 75^\circ$ 와 $\cos 15^\circ$ 를 구하여라.

solution

(뎃셈정리)

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

예제 2-12 (1) 제1사분면의 각 α에 대하여, $\sin\alpha = 2/3$일 때, $\sin 2\alpha$와 $\cos 2\alpha$를 구하여라.

(2) 제4사분면의 각 α에 대하여, $\sin\alpha = -1/3$일 때, $\sin(\alpha/2)$와 $\cos(\alpha/2)$를 구하여라.

solution (1) 제1사분면의 각 α에 대하여, $\sin\alpha = 2/3$이므로 $\cos\alpha = \sqrt{1-(2/3)^2} = \sqrt{5}/3$이다.

(배각공식)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\ \cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

(2) 제4사분면의 각 α에 대하여, $\sin\alpha = -1/3$이므로

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(-1/3)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이고 따라서

(반각공식)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{1-2\sqrt{2}}{3}}{2}} = -\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1+2\sqrt{2}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$$

■

예제 2-13 (1) 곱을 합 또는 차로 고치는 공식을 이용하여 $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$ 를 구하여라.

(2) 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식을 이용하여 $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ 를 구하여라.

solution

(1) $$\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}[\sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ)]$$

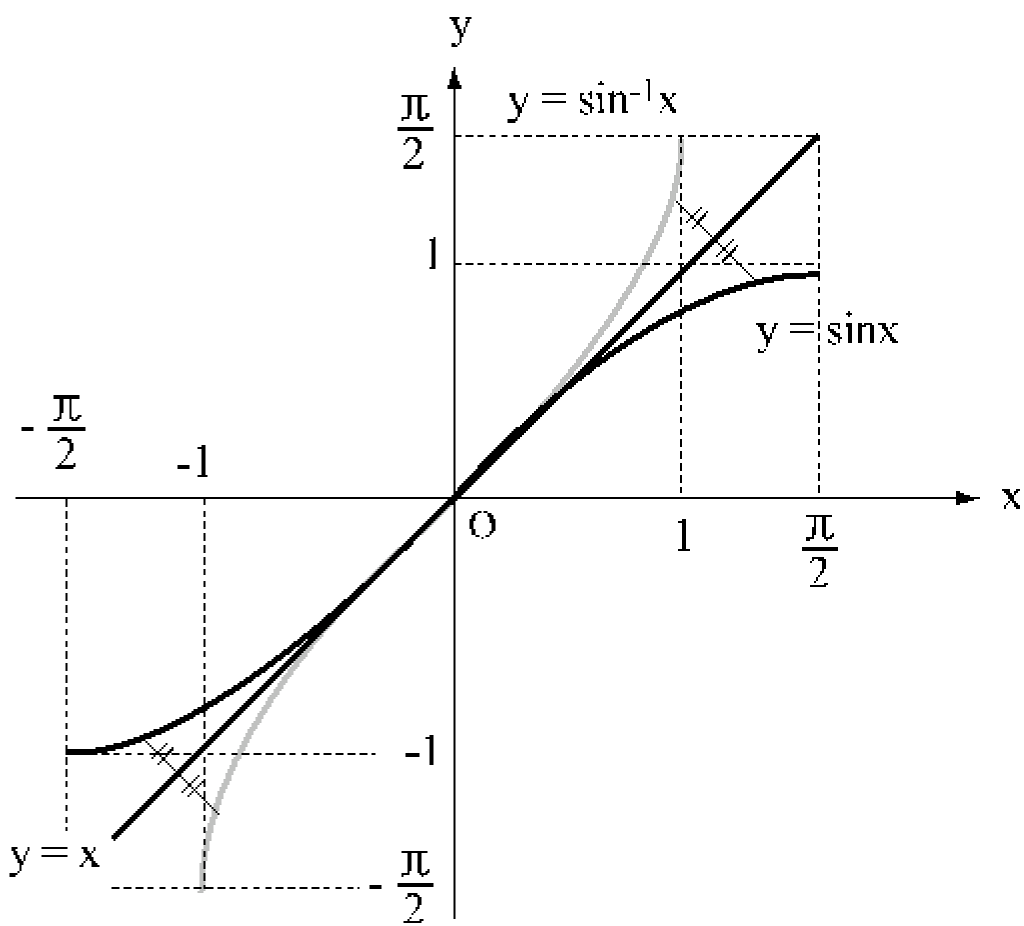
$$= \frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2) $$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)$$

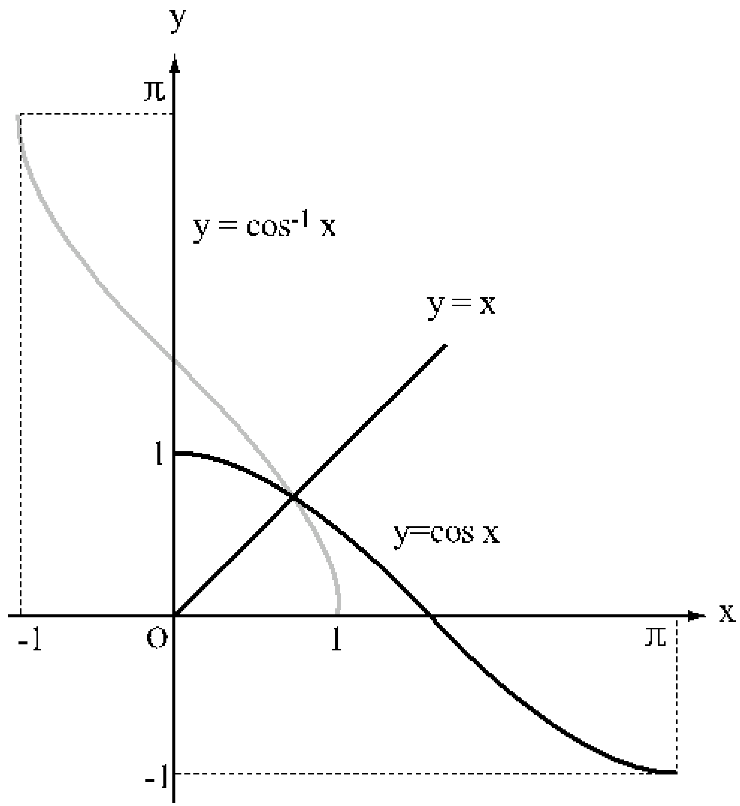
$$= 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\boxed{(19)\quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]}$$

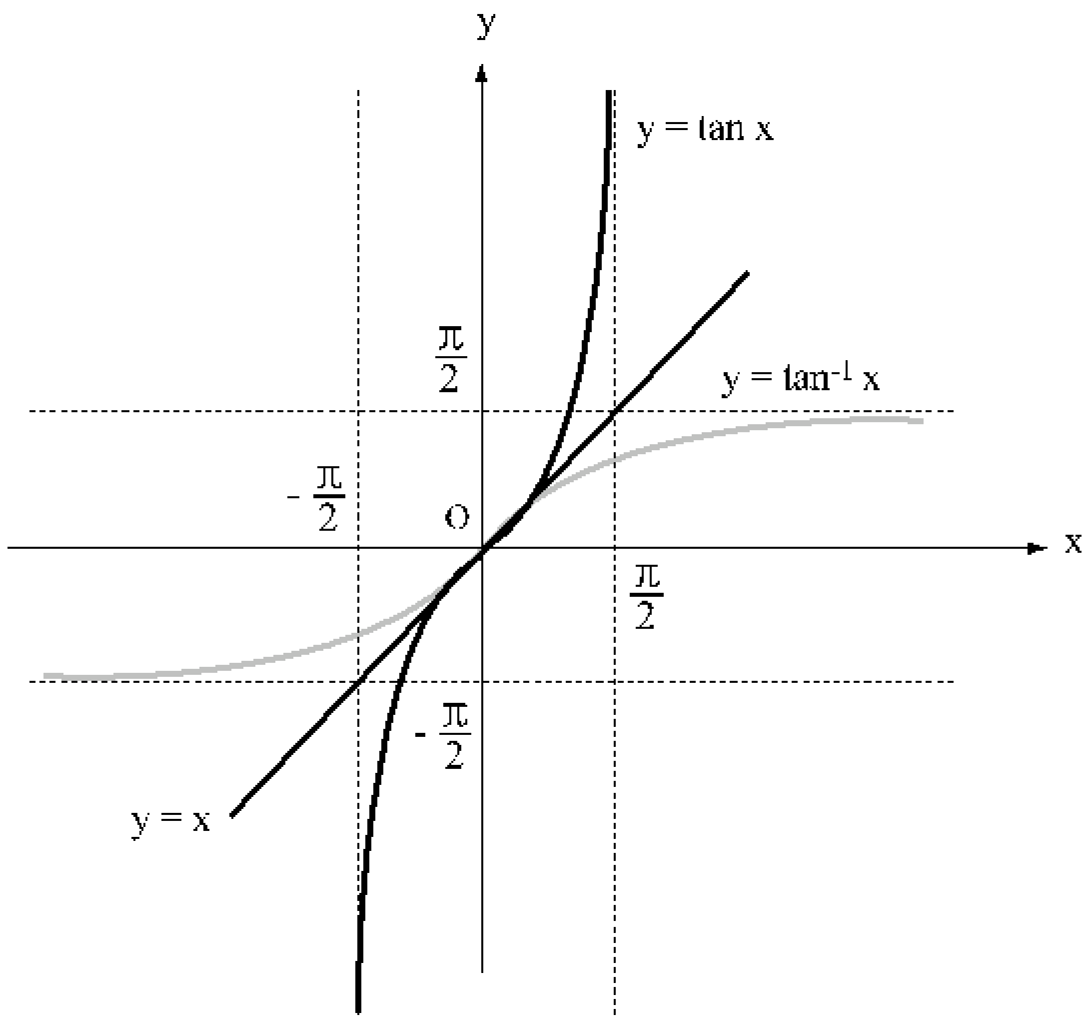
$$\boxed{(22)\quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$



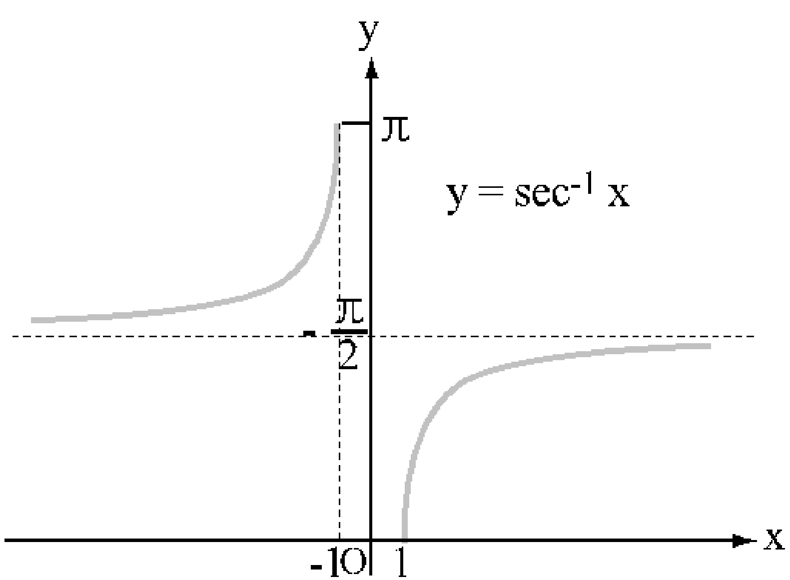
y = sin x와 y = sin^{-1} x의 그래프



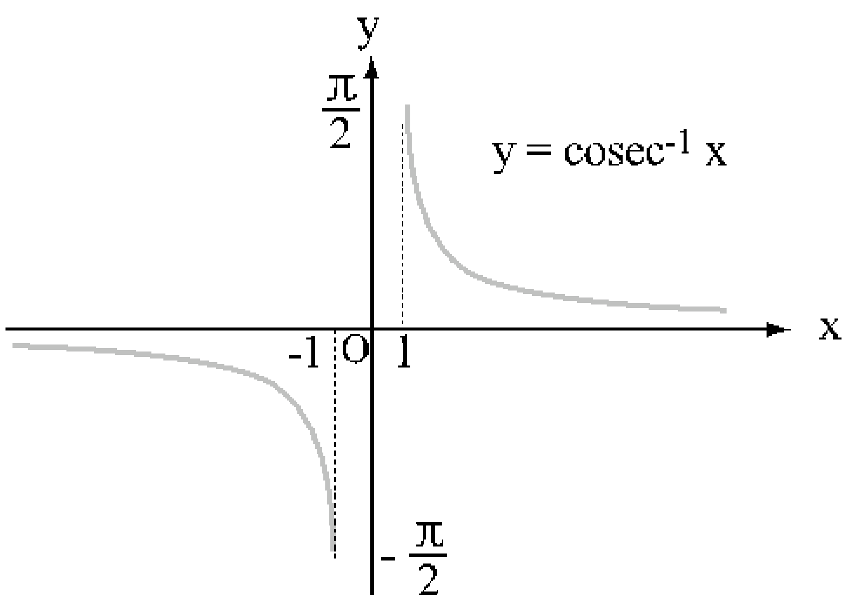
$y = \cos x$와 $y = \cos^{-1} x$의 그래프



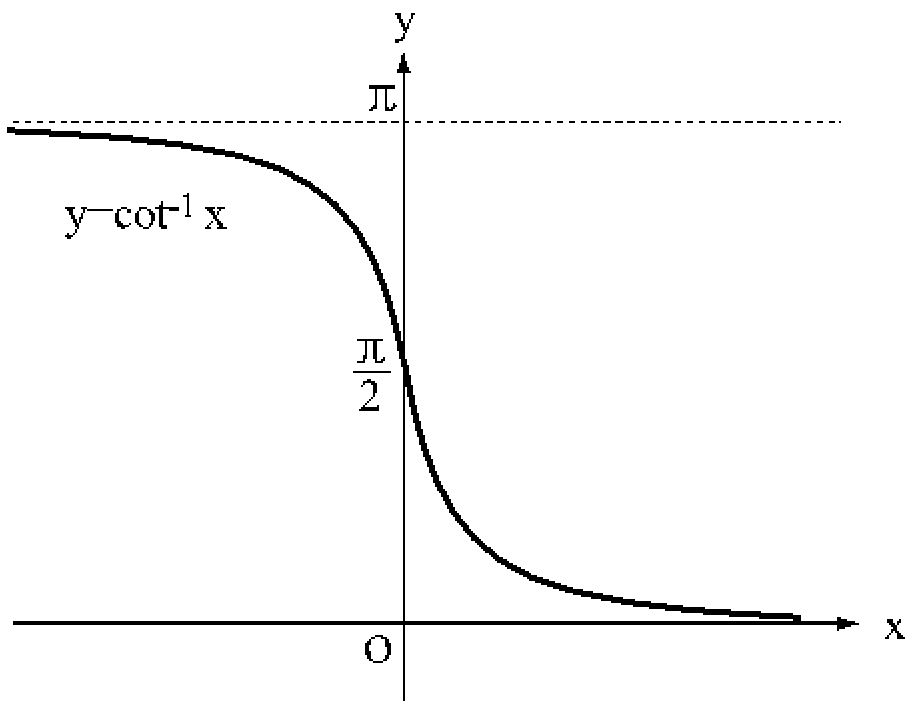
y = tan x와 y = $\tan^{-1}$ x의 그래프



y = sec^{-1} x의 그래프



y = cosec^{-1} x의 그래프



y = $\cot^{-1}$ x의 그래프