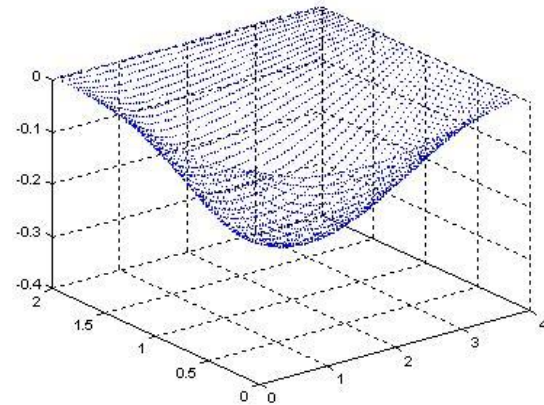
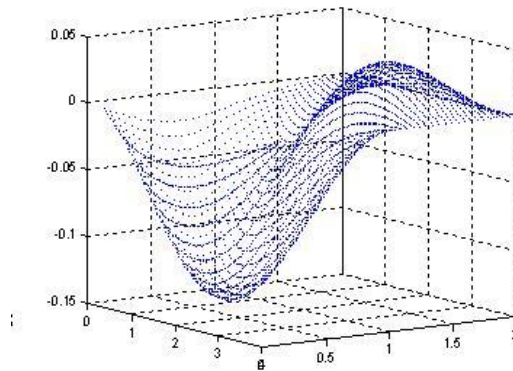


Chapter 02

초월함수 (Transcendental Function)



● 지수함수

$$a^n : a \text{의 } n \text{제곱} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{N \text{번}}$$

n : 지수 (exponent, power)

a : 밑 (base)

지수의 성질

$$1 = a^0, \quad \frac{1}{a} = a^{-1}, \quad \frac{1}{a^2} = a^{-2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2}, \quad \sqrt[3]{a} = a^{1/3}, \quad \dots, \quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

● 지수법칙

$$(1) \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(2) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

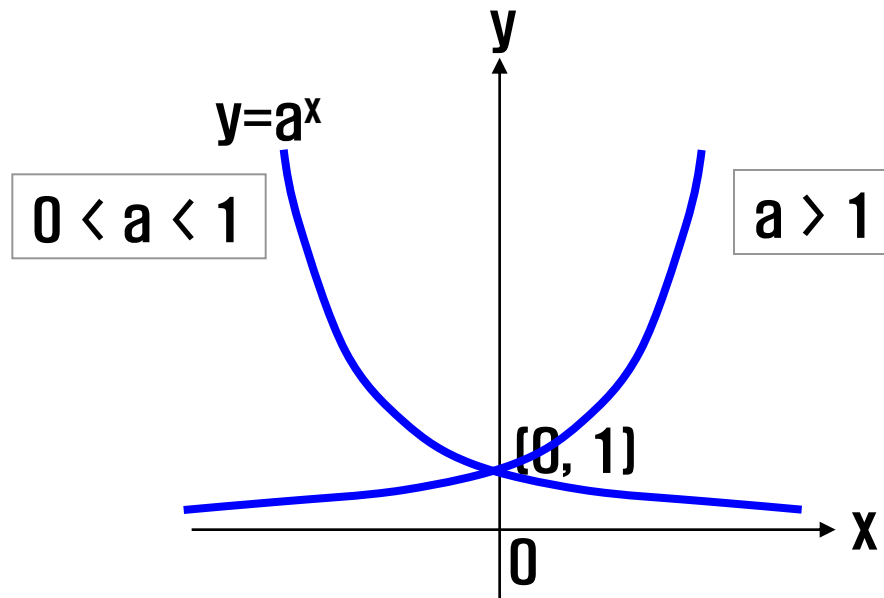
$$(3) \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$(4) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

지수함수 (exponential function)

$$y=a^x \quad [\text{단, } a>0, a \neq 1]$$

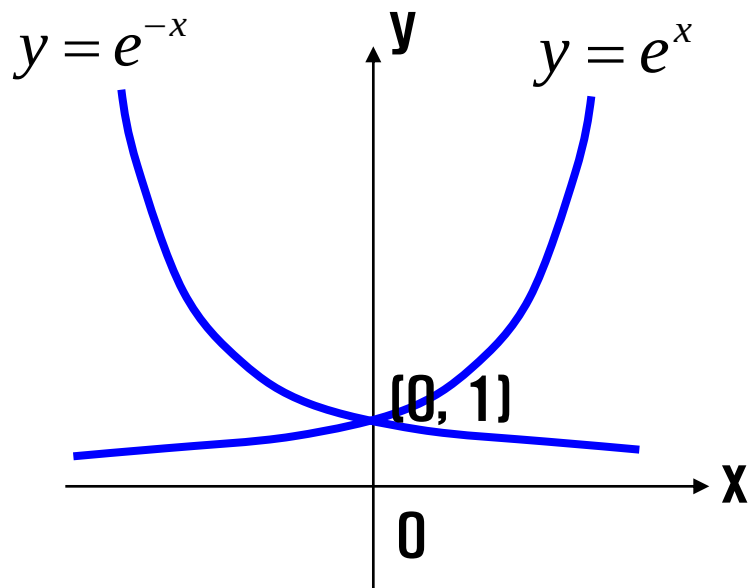
 $y=a^x$ 의 그래프

- x 증가 $\rightarrow y$ 감소
- $x \rightarrow \infty$ 이면 $y \rightarrow 0$ (x 축 점근선)
- $a^0=1$ 이므로 항상 $(0,1)$ 통과

자연지수함수 (natural exponential function)

$$y = e^x$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828$$

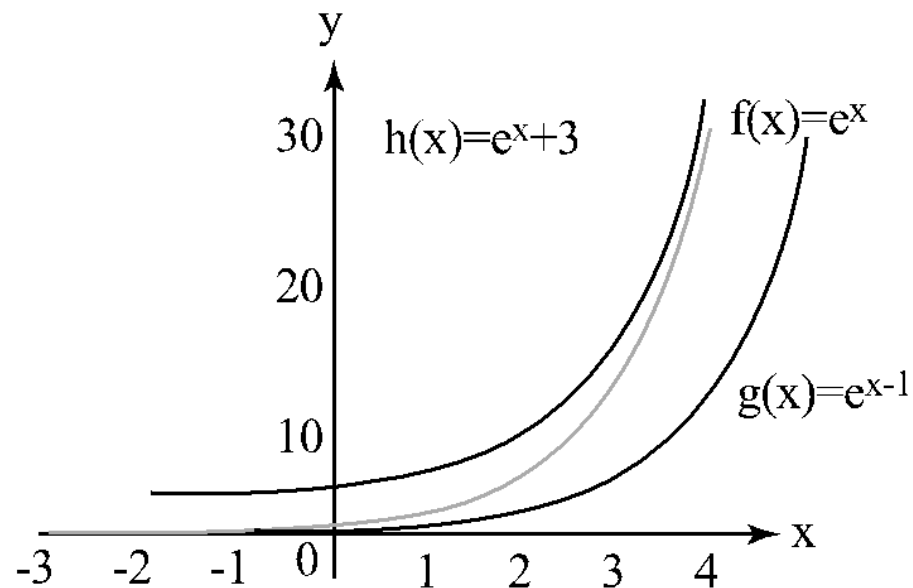


$y=e^x$ 와 $y=e^{-x}$ 의 그래프

지수함수의 이동

$y=a^x \rightarrow y = a^x + c$: y 축 방향으로 $+c$ 만큼 평행이동

$\rightarrow y = a^{x-c}$: x 축 방향으로 $+c$ 만큼 평행이동



$y = e^x$ 의 평행이동

예제 2-1

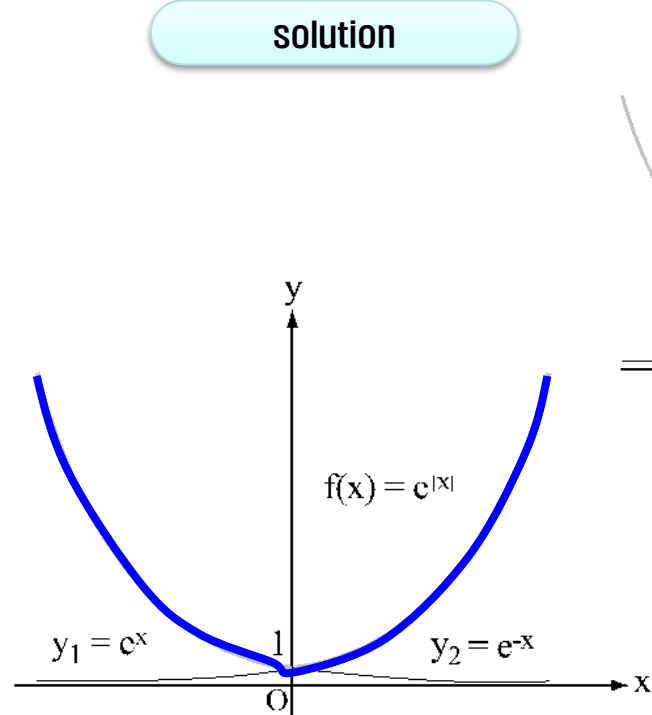
다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $f(x) = e^{|x|}$

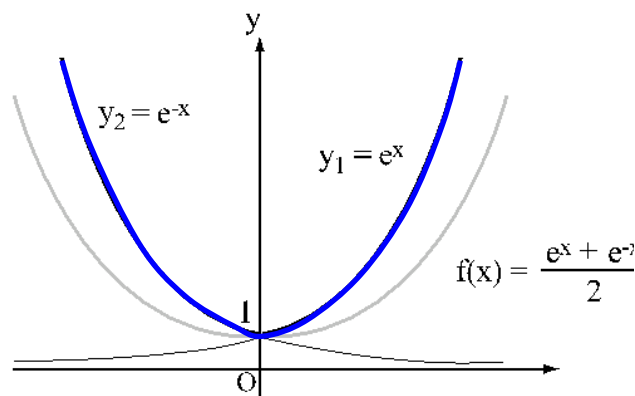
(2) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(3) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

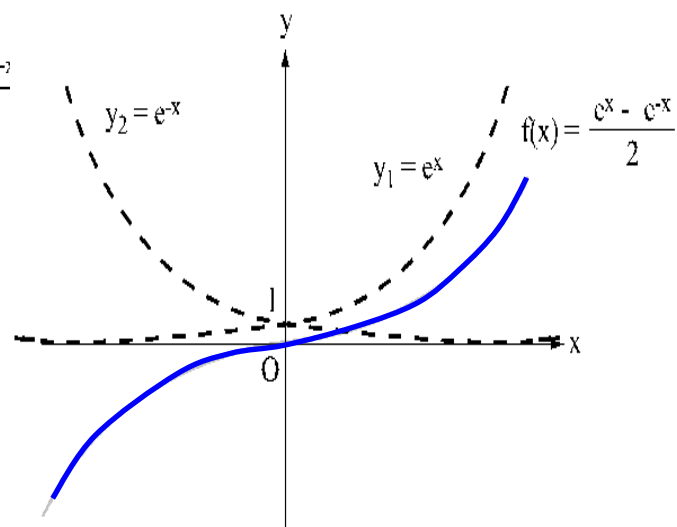
solution



$$f(x) = e^{|x|}$$



$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

예제 2-2

$2^x = 9$, $18^y = 27$ 일 때, $\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ 의 값을 구하여라.

solution

$$2^x = 9 \text{로부터 } 2 = 3^{\frac{2}{x}} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$18^y = 27 \text{로부터 } 18 = 3^{\frac{3}{y}} \dots\dots \textcircled{2}$$

이고, $\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 를 구하면

$$\frac{2}{18} = \frac{3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{3}{y}}} = 3^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} \quad \text{또는} \quad \frac{1}{9} = 3^{-2} = 3^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}}$$

따라서 $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -2$ 이다.

로그함수(logarithm function)

$$y = \log_a x \quad [\text{단, } x > 0 \quad a > 0, a \neq 1]$$

$$y = a^x \xrightarrow{\text{역함수}} x = a^y \xrightarrow{\quad} y = \log_a x$$

진수
밑

자연로그(natural log) $\log_e x = \ln x$

상용로그(common log) $\log_{10} x$

예제 2-3

다음 지수식을 동치인 로그식으로 나타내어라.

$$(1) 10^0 = 1 \quad (2) 3^1 = 3 \quad (3) 3^{-a} = b \quad (4) e^a = 1.5$$

solution

$$(1) 0 = \log_{10} 1 \quad (2) 1 = \log_3 3 \quad (3) -a = \log_3 b \quad (4) a = \log_e 1.5$$

예제 2-4

다음 로그식을 지수식으로 나타내어라.

$$(1) \log_3 3 = 1 \quad (2) \log_{10} \left(\frac{1}{c} \right) = -b \quad (3) \log_e 1 = 0 \quad (4) \log_7 \left(\frac{1}{49} \right) = -2$$

solution

$$(1) 3^1 = 3 \quad (2) \frac{1}{c} = 10^{-b} \quad (3) 1 = e^0 \quad (4) \frac{1}{49} = 7^{-2}$$

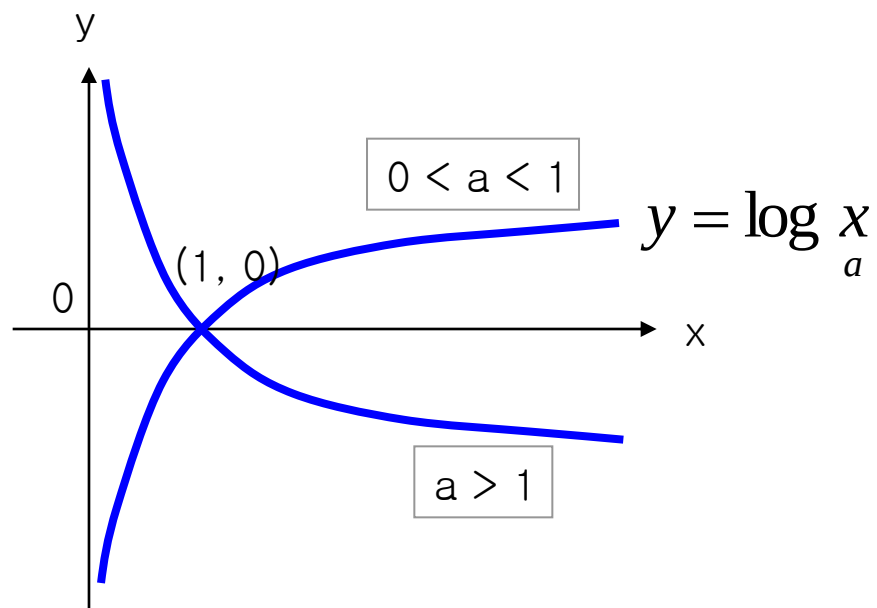
$$10^0 = 1$$

$$\text{Log}_3 3 = 1$$

$$(3) \log_a a = 1$$

$$(4) \log_a 1 = 0$$

로그함수 그래프

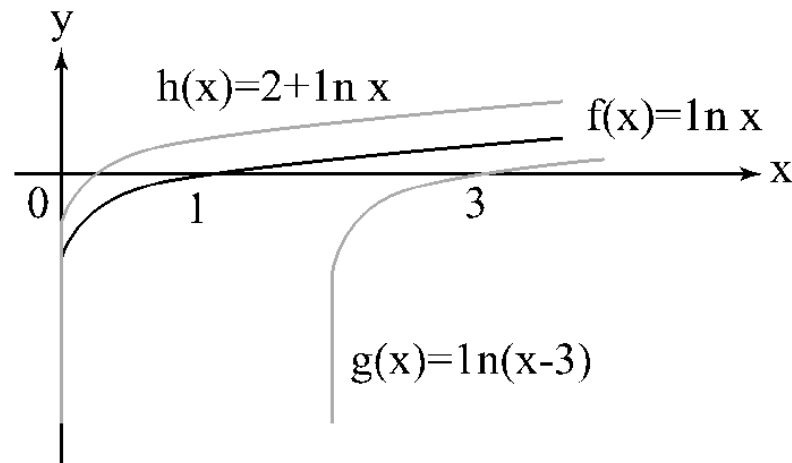


- x 증가 $\rightarrow y$ 증가
- $x \rightarrow 0$ 이면 $y \rightarrow -\infty$
- $x=1$ 일 때 $\log_a 1 = 0$ 이므로 항상 $(1, 0)$ 통과

로그함수의 이동

$y = \ln x \rightarrow y = \ln x + c$: y 축 방향으로 $+c$ 만큼 평행이동

$\rightarrow y = \ln(x-a)$: x 축 방향으로 $+a$ 만큼 평행이동



$g(x) = \ln(x-3)$ 와 $h(x) = 2 + \ln x$

로그법칙

$$(1) \log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

: 진수의 곱 $\rightarrow$ 분리 후 더하기

$$(2) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

: 진수의 나눗셈 $\rightarrow$ 분리 후 빼기

$$(3) \log_a b^m = m \log_a b$$

: 진수의 지수 $\rightarrow$ log 앞으로

$$(4) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{단, } c \neq 1 \text{인 양수}$$

: 밑변환 공식 $\rightarrow$ 새로운 밑으로 각각 나누기

예제 2-5

다음 방정식을 구하여라.

(1) $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$

(2) $\log_2(x-3) = \log_4(x-1)$

solution

(1) $X = 3^x$ 이라 하면

$$9^x - 3^{x+1} + 2 = 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

$$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) = 0$$

$$X = 1 \text{ 또는 } X = 2$$

그러므로 $3^x = 1$ 또는 $3^x = 2$ 이므로

$$\log_3 1 = 0 = x$$

$$\log_3 2 = x$$

예제 2-5 다음 방정식을 구하여라.

$$(1) 9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$$

$$(2) \log_2(x-3) = \log_4(x-1)$$

solution

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 2^2} = \frac{\log_2(x-1)}{2} \quad \text{이므로 준 식은}$$

$$2\log_2(x-3) = \log_2(x-1)$$

$$\log_2(x-3)^2 = \log_2(x-1)$$

$$\text{그러므로 } (x-3)^2 = x-1$$

$$x^2 - 6x + 9 = x - 1; \quad x^2 - 7x + 10 = 0; \quad (x-2)(x-5) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{또는} \quad x = 5$$

한편, 진수 조건($x > 3$)에 의해 $x = 5$ 이다.

쌍곡선 함수 (hyperbolic function)

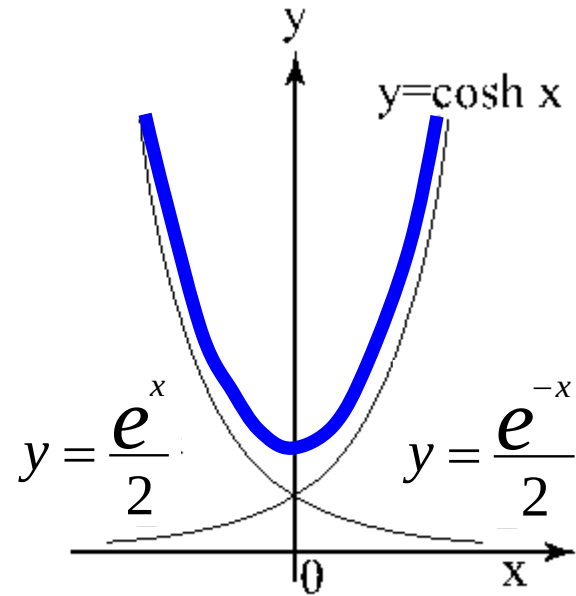
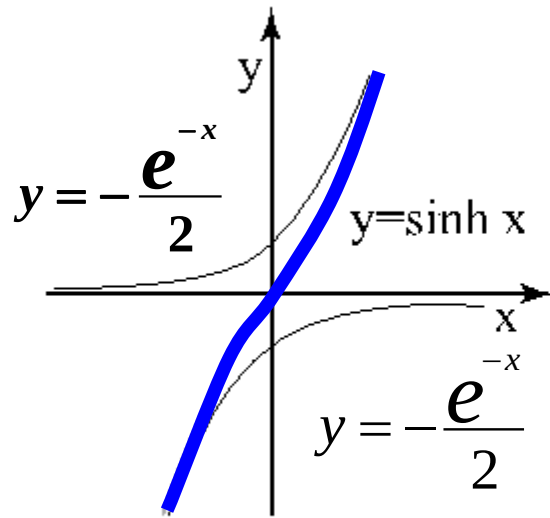
쌍곡선사인함수(hyperbolic sine function), 쌍곡선코사인함수(hyperbolic cosine function)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

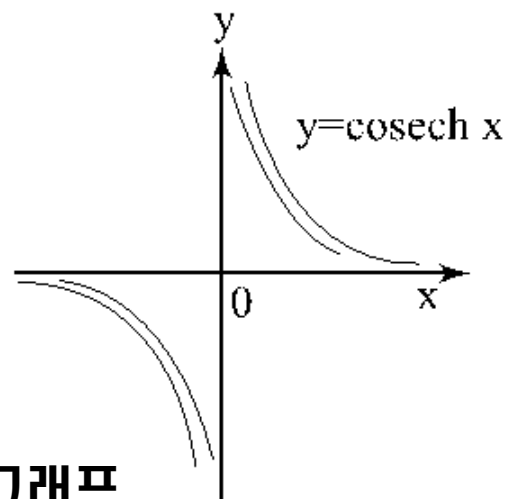
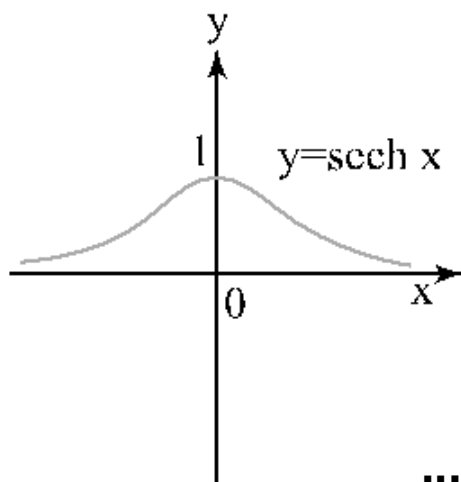
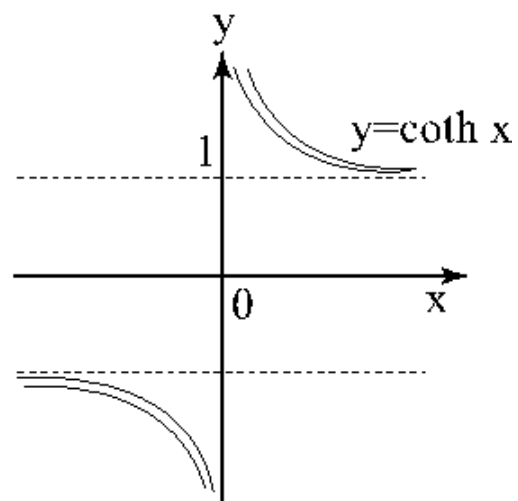
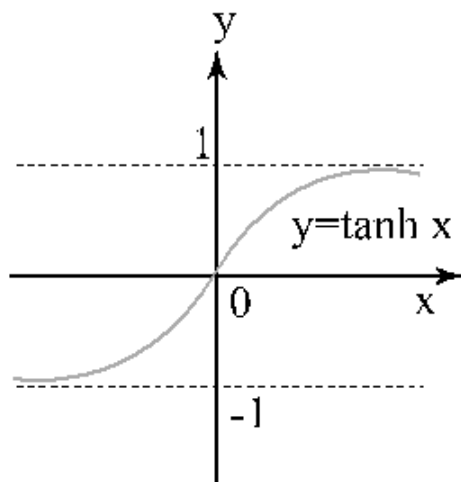
그리고 이들 함수로부터 얻어지는 함수들

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \neq 0)$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (x \neq 0)$$



쌍곡선함수들의 그래프



쌍곡선함수들의 그래프

쌍곡선 함수의 성질

쌍곡선 함수

- (1) $\cosh x + \sinh x = e^x$
- (2) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
- (3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- (4) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- (5) $\coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$

역쌍곡선 함수

- (6) $y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y$
- (7) $y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y, \quad y \geq 0$
- (8) $y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y, \quad |x| < 1$
- (9) $y = \operatorname{sech}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y, \quad y \geq 0$
- (10) $y = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x = \coth y$
- (11) $y = \operatorname{cosech}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cosech} y$