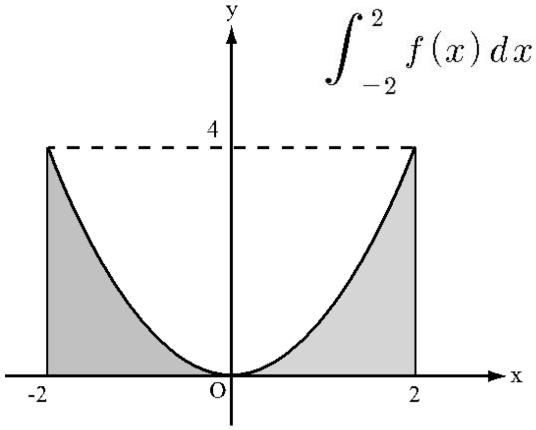
## 정적분의 성질

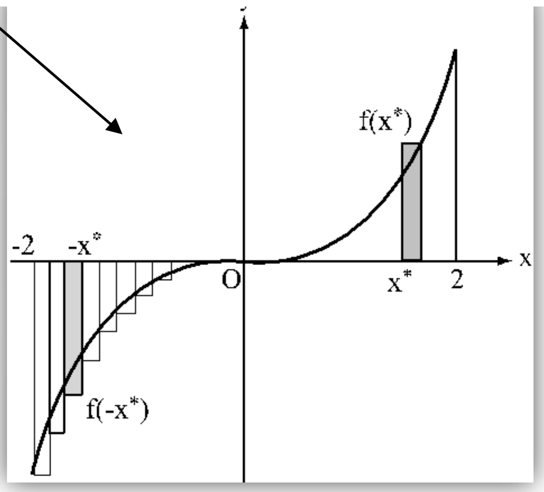
(12) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ : y축에 대하여 대칭인 우함수 (예 : $f(x)=x^2$)

(13) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ : 원점에 관하여 대칭인 기함수 (예 : $f(x)=x^3$)

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = -\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 0$$




$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)dx$$



**예제 4-15** 정적분 $\int_{-1}^{1}(2x^3+x^2+4)\,dx$ 를 구하여라.

**solution**

우함수 : $x^2+4$, 기함수 : $2x^3$ 이므로

$$\int_{-1}^{1}(2x^3+x^2+4)\,dx = \int_{-1}^{1}2x^3\,dx + \int_{-1}^{1}(x^2+4)\,dx$$

$$= 0 + \int_{-1}^{1}(x^2+4)\,dx = 2\int_{0}^{1}(x^2+4)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}(1)^3+4\right) = \frac{26}{3}$$

$$\left(\because \text{앞의 예제에서} \int_{a}^{b}c\,dx = c\,(b-a),\ \int_{0}^{b}x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3\right) \quad \blacksquare$$

**정적분의 정의만 가지고 정적분을 구하려면, 수열의 합에 대한 극한을 구해야 하므로 그 계산이 매우 힘들거나 불가능할 수도 있다.**
**따라서 정적분을 구하기 위한 다른 방법이 필요하며, 정리 1과 같은 미적분학의 기본정리를 이용한다.**

**정리1 : 미적분학의 기본정리**

$f$ 가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면,

(1) 모든 $x \in (a, b)$ 에 대하여, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ 이다.

(2) $F$ 가 $[a, b]$에서 $f$ 의 원시함수이면, 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

**예제 4-16** $1 \leq x \leq 4$에 대하여 $F(x) = \int_1^x u^3\,du$ 라 할 때,

(1) $F'(x)$를 구하여라.

(2) $\int_1^4 x^3\,dx$ 를 구하여라.

**solution**

(1) 미적분의 기본정리 (1)에 의하여

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x u^3\,du = x^3$$

(2) $x^3$ 의 원시함수는 $F(x) = \int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4$ 이므로

$$\int_1^4 x^3\,dx = F(x)\Big|_1^4 = \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{4}(4^4) - \frac{1}{4}(1^4)$$

$$= \frac{256-1}{4} = \frac{255}{4}$$

■

**치환적분법에 의한 정적분**

$$(14)\quad \int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

치환적분을 사용하면 적분구간이 바뀐다.

$$\int_1^2 (1+x^2)(2x)\,dx$$

$$u(x) = x^2,\quad du = 2x\,dx$$

$$x = 1 \quad \longrightarrow \quad u(1) = 1$$

$$x = 2 \quad \longrightarrow \quad u(2) = 4$$

$$\int_1^2 (1+x^2)(2x)\,dx = \int_1^4 (1+u)\,du = \left[u + \frac{1}{2}u^2\right]_1^4$$

$$= \left(4 + \frac{1}{2}(4^2)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}(1^2)\right)$$

$$= \frac{21}{2}$$

**예제 4-17** 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2 (2x-1)^3\,dx$ (2) $\int_0^2 x(3-x^2)^2\,dx$

**solution**

(1) $u=2x-1$, $\dfrac{du}{dx}=2$ 즉, $dx=\dfrac{1}{2}du$

또한, $x=1$이면 $u=1$이고, $x=2$이면 $u=3$이므로

$$\int_1^2 (2x-1)^3\,dx=\int_1^3 u^3\left(\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}u^4\right]_1^3=\frac{1}{8}(81-1)=10$$

**예제 4-18** 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2 (2x-1)^3\,dx$ (2) $\int_0^2 x\,(3-x^2)^2\,dx$

**solution**

(2) $u=3-x^2$, $\dfrac{du}{dx}=-2x$ 즉, $x\,dx=-\dfrac{1}{2}du$

또한 $x=0$이면 $u=3$이고 $x=2$이면 $u=-1$이므로

$$\int_0^2 x\,(3-x^2)^2\,dx = \int_0^2 (3-x^2)^2\,(x\,dx)$$

$$= \int_3^{-1} u^2\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{2}\int_3^{-1} u^2\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} u^2\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{1}{6}\,(27-(-1)) = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

■

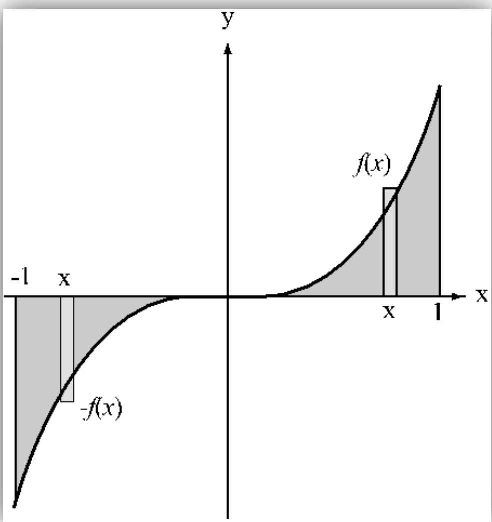
## 곡선의 면적 (1)

폐구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$와 $x=a, x=b$ 그리고 $x$-축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

**예제 4-19** 곡선 $f(x)=x^3$과 직선 $x=-1$, $x=1$ 그리고 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

**solution** $-1 \leq x \leq 0$에서 $f(x) \leq 0$이고 $0 \leq x \leq 1$에서 $f(x) \geq 0$이므로




$$S=\int_{-1}^{1} |f(x)|dx = \int_{-1}^{0} (-x^3)dx + \int_0^1 x^3 dx$$

$$= -\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

■

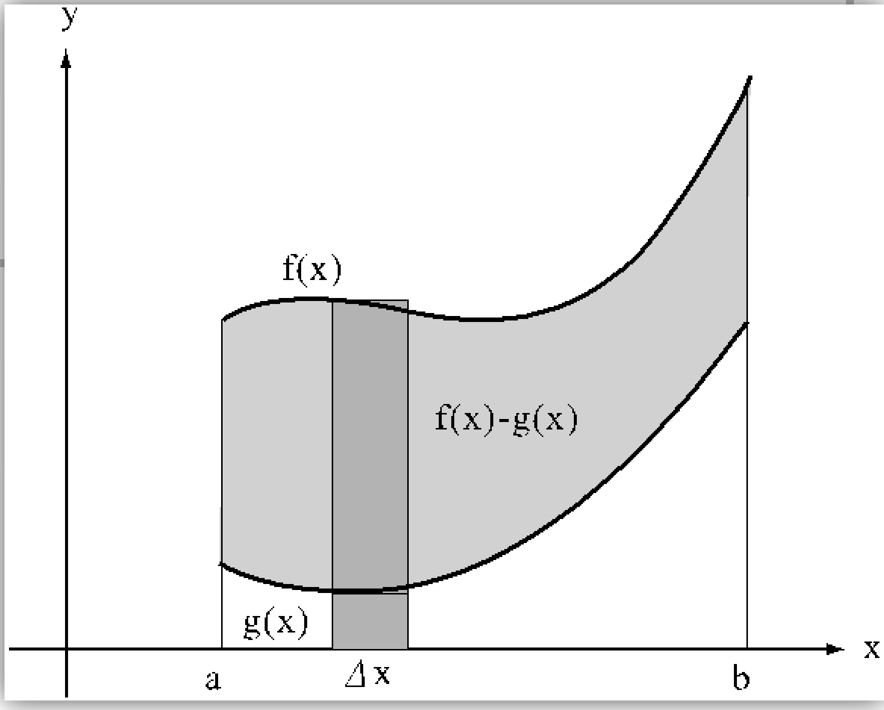
## 곡선의 면적 (2)

폐구간 $[a, b]$에서 $0 \leq g(x) \leq f(x)$일 때, 곡선 $y = g(x)$, $y = f(x)$ 그리고 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$는

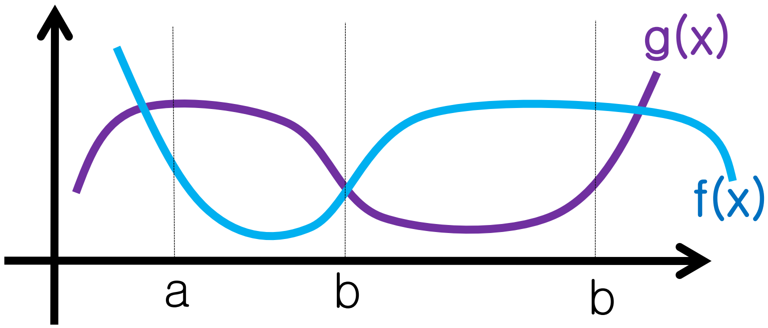
$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

그러므로

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



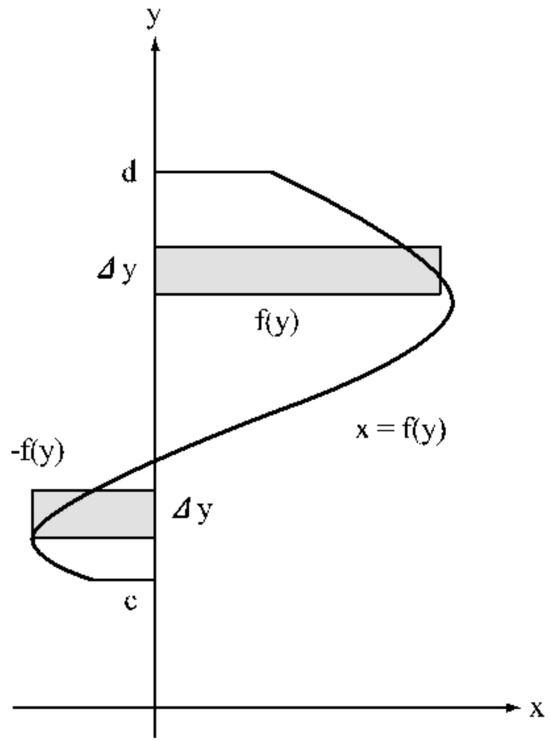

즉, 위쪽에 있는 함수에서 밑에 있는 함수를 뺀다.
함수가 교차하면 구간을 나눈다.



## 곡선의 면적 (3)

함수 $x=f(y)$ 그리고 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |f(y)|\,dy$$



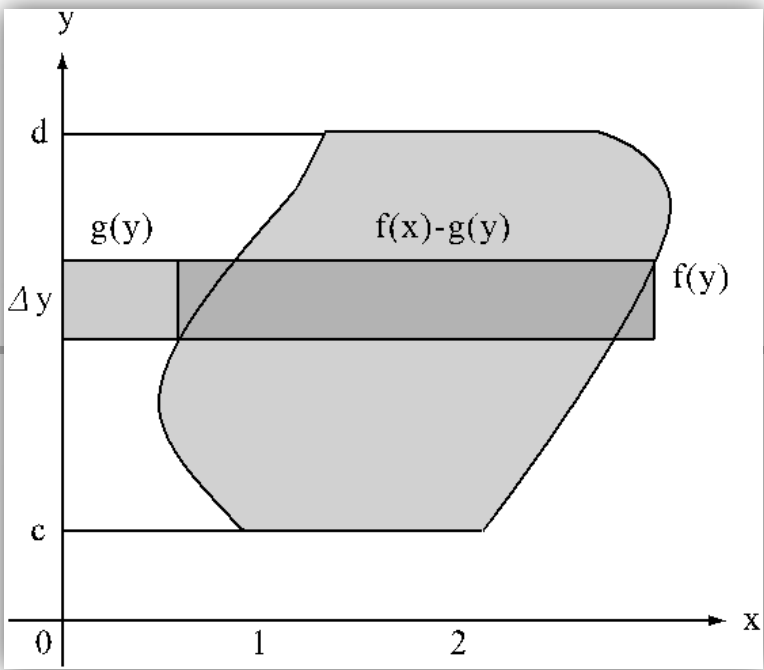
## 곡선의 면적 (4)

폐구간 $[c, d]$에서 $0 \leq g(y) \leq f(y)$일 때, 곡선 $x = g(y)$, $x = f(y)$ 그리고 직선 $y = c$, $y = d$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$는

$$S = S_1 - S_2 = \int_c^d f(y)\,dy - \int_c^d g(y)\,dy$$

그러므로

$$S = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$



**예제 4-20** 폐구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

**solution**

폐구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 $x$좌표 :

$$\sin x = \cos x \quad \text{또는} \quad \tan x = 1 \ \text{즉,} \ x = \pi/4$$

그러므로

(1) $[0, \pi/4]$에서 $\cos x \geq \sin x$

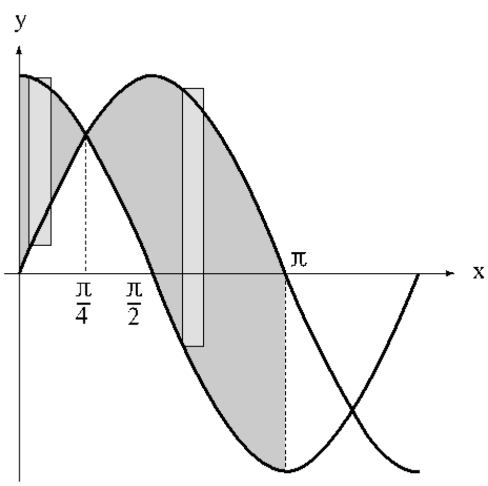
(2) $[\pi/4, \pi]$에서 $\sin x \geq \cos x$ 이므로

$$S_1 = \int_0^{\pi/4} [\cos x - \sin x]\,dx = \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{\pi/4}^{\pi} [\sin x - \cos x]\,dx = \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi} = \sqrt{2} + 1 \quad \text{따라서}$$

$$S = S_1 + S_2 = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{2} + 1\right) = 2\sqrt{2}$$

■



**예제 4-21** 두 곡선 $x=y^2-4$와 $y=x-2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

**solution**

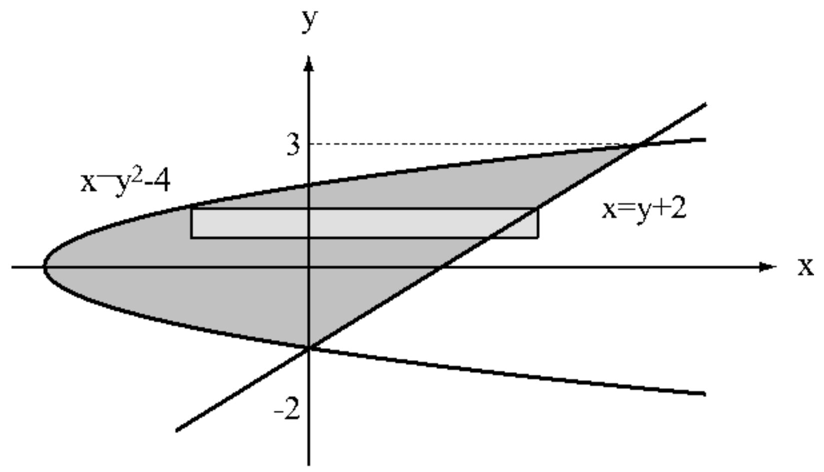
두 함수의 교점의 $y$-좌표 :

$y^2-4=y+2$ 또는 $y^2-y-6=0$ 따라서 $y=-2$ 또는 $y=3$이다. 그러므로

$$S=\int_{-2}^{3}\left[(y+2)-(y^2-4)\right]dy=\int_{-2}^{3}(-y^2+y+6)\,dy$$

$$=-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+6y\Big|_{-2}^{3}$$

$$=\frac{125}{6}$$




■

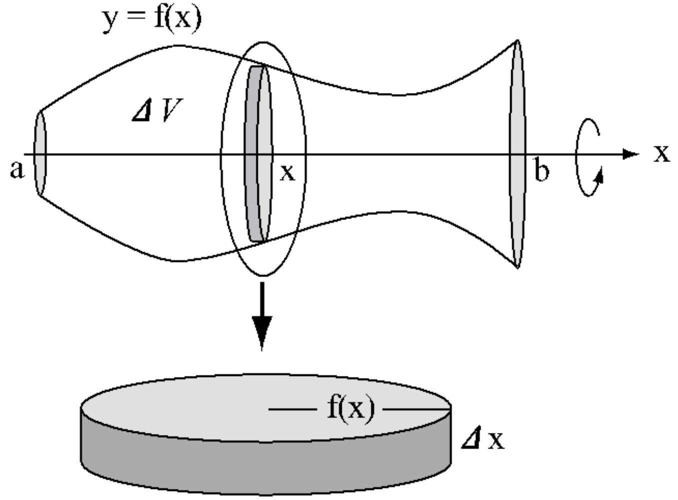
## 정적분을 이용한 회전체의 부피계산- x축 회전

밑면의 반지름: $f(x)$, 높이 : $\Delta x$

$$\Delta V = \pi [f(x)]^2 \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x$$

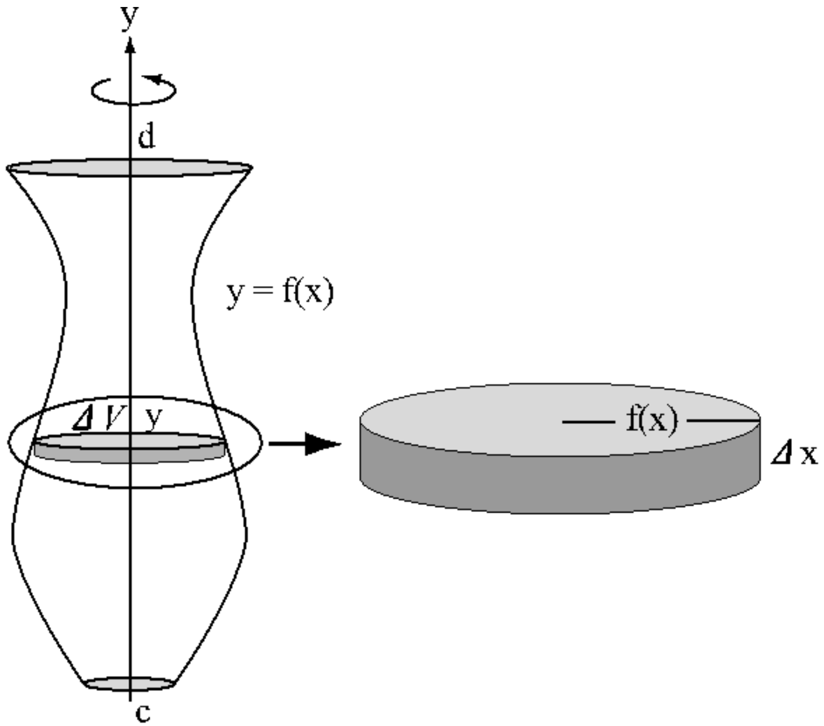
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$




**x축을 중심으로 회전한 회전체**

## 정적분을 이용한 회전체의 부피계산- x축 회전

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \pi [f(y_k)]^2 \Delta y = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$




y축을 중심으로 회전한 회전체

**예제 4-22** 반지름이 $a$인 구(球)의 부피를 구하여라.

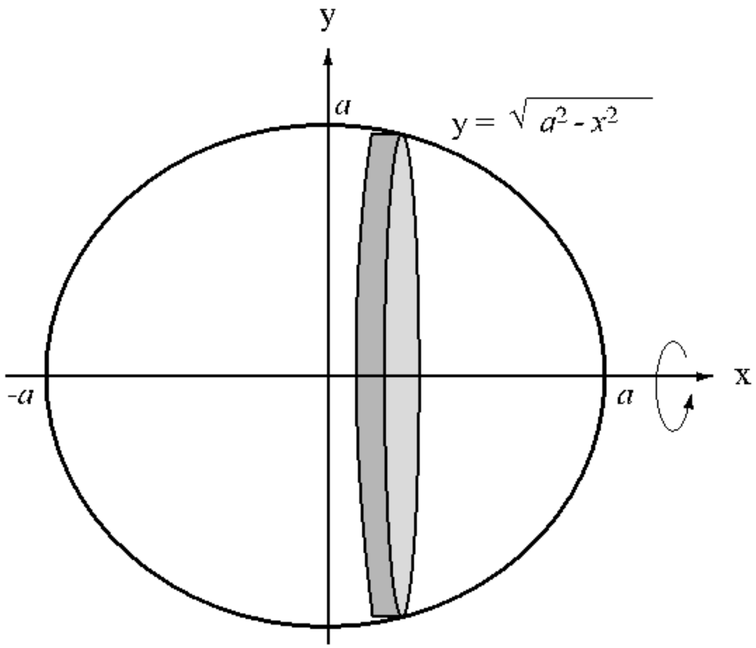
**solution**

반지름이 $a$인 원의 방정식은 $x^2+y^2=a^2$ 이고, 상반원은 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 이다. 한편 상반원을 $x$-축을 중심으로 회전하면 구가 되므로 구하고자 하는 구의 부피는 다음과 같다.

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$=2\pi\int_0^a (a^2-x^2)\,dx$$

$$=2\pi\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi a^3$$



**예제 4-23** $y=x^2$과 $y=9$로 둘러싸인 부분을 $y$축을 중심으로 회전한 회전체의 부피를 구하여라.

**solution**

$$V=\int_0^9 \pi x^2\,dy=\pi\int_0^9 y\,dy=\pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^9=\frac{81}{2}\pi$$ ■