

제 4장 일반적인 가진조건에서의 진동

4.1 일반 주기력 하에서의 응답

주기가 $\tau=2\pi/\omega$ 인 가진력 $F(t)$ 를 Fourier 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

여기서

$$a_j = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos j\omega t dt \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_j = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin j\omega t dt \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

그러므로 일반 주기력 $F(t)$ 하에서의 계의 운동방정식은

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (1)$$

위식의 우변항은 조화함수의 합으로 구성되어 있다. 중첩의 원리를 적용하여 운동방정식(1)의 해는 다음 방정식 각각의 해를 합한 것과 같다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} \quad (2)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos j\omega t \quad (3)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \sin j\omega t \quad (4)$$

식 (2)의 특별해는

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k}$$

식 (3)과 식 (4)는 3장의 해를 적용하면 된다.

$$x_p(t) = \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j)$$

$$x_p(t) = \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j)$$

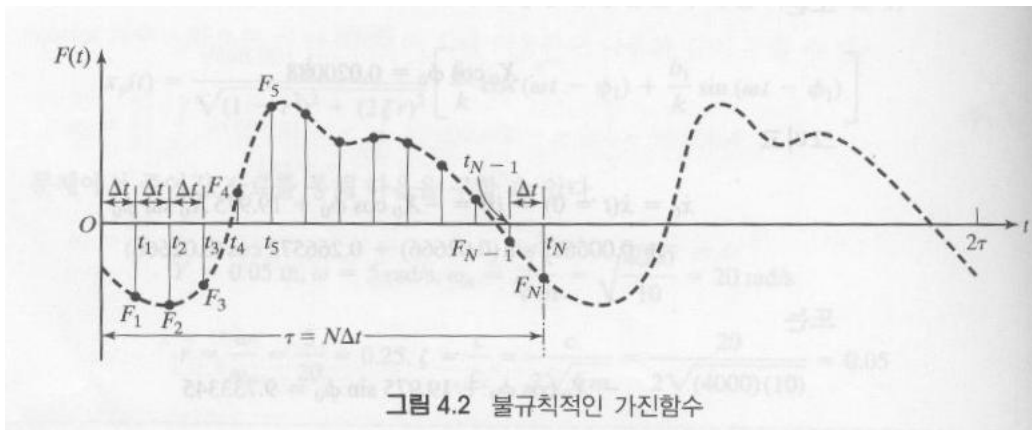
여기서 위상각 ϕ_j 를 진동수 비 $r = \omega/\omega_n$ 를 이용하여 표현하면

$$\phi_j = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2} \right),$$

그러므로, 정상상태의 특별해는

$$x_p(t) = \frac{a_o}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b_j/k)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j)$$

4.2 불규칙한 형태의 주기력하의 응답



$$a_o = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i$$

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \cos \frac{2j\pi t_i}{\tau}$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \sin \frac{2j\pi t_i}{\tau}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

4.3 비주기력 하에서의 응답

주기적인 가진력 : Fourier series

비주기적인 가진력 :

- Fourier integral
- Convolution integral
- Laplace transform
- Interpolation model
& numerical procedure
- Numerical integration

4.4 Convolution integral

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

- **Impulsive force**(충격력)

One that has a large magnitude F and acts
for a very short period of time Δt

- Impulse (충격량)

$$\underline{F} = F\Delta t = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1$$

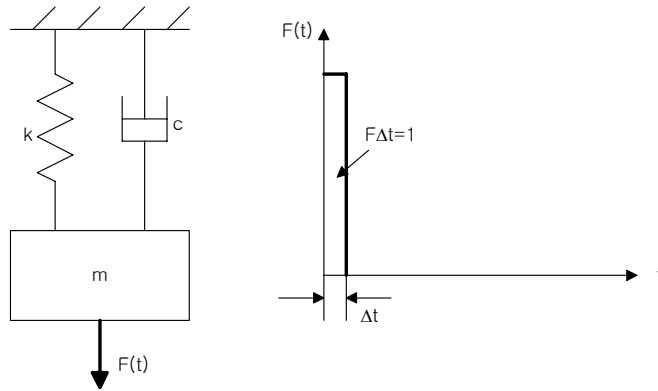
= (충격 후의 운동량) - (충격 전의 운동량)

충격량 $\underline{F} = \int_t^{t+\Delta t} F dt$

Unit impulse

$$\underline{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F dt = F \cdot dt = 1$$

1 충격량에 대한 응답



위 그림과 같이 단위 충격량을 받는 점성감쇠 스프링 질량계의 운동 방정식은

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

식 (5)의 해는 2장에서 구하였고 다음과 같다.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[x_o \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_o + \zeta\omega_n x_o}{\omega_d} \sin\omega_d t \right] \quad (6)$$

단위 충격량이 가해지기전 질량이 정지상태로 있었다면 ($t=0^-$, $x=\dot{x}=0$)

$$\begin{aligned} \text{충격량} &= \underline{f} = 1 \\ &= m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^-) \\ &= m\dot{x}_o \end{aligned}$$

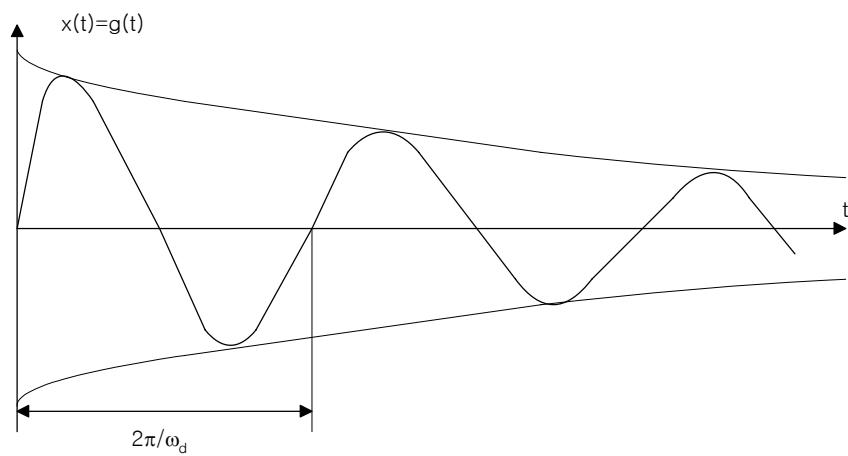
초기조건은 다음과 같이 정해진다.

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_o = 0 \\ \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_o = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

그러므로 식 (6)은

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin\omega_d t \quad (7)$$

⇐ impulse response function(충격응답함수)

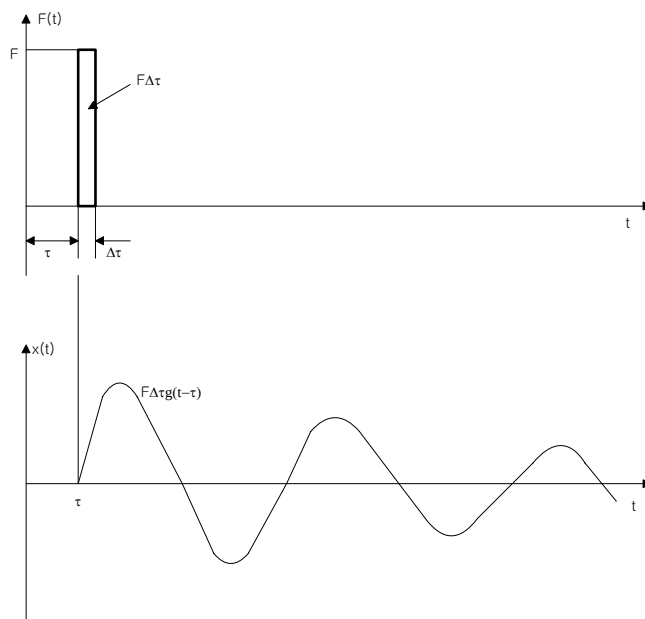


충격량의 크기가 $\underline{F}$ 이면,

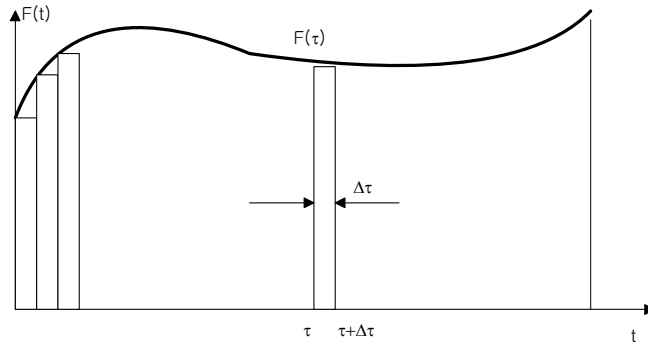
$$x(t) = \frac{\underline{F} e^{-\zeta \omega_n t}}{m \omega_d} \sin \omega_d t = \underline{F} g(t)$$

만약 충격량이 임의의 시간 $t = \tau$ 에서 가해지면,

$$x(t) = \underline{F} g(t - \tau)$$



2. 일반 가진 조건에서의 응답



시간 τ 에서 힘 $F(t)$ 가 짧은 $\Delta\tau$ 의 짧은 순간동안 계에 작용한다면 충격량은 $F(t)\Delta\tau$ 가 된다. 그러므로

$$\Delta x(t) = F(\tau)\Delta\tau g(t-\tau)$$

시간 t 에서 전체 응답은 개개의 충격량에 의한 모든 응답을 합하여 구할 수 있다.

$$x(t) = \sum F(\tau)g(t-\tau)\Delta\tau$$

$\Delta\tau \rightarrow 0$ 이면 적분형으로

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \Leftarrow \text{Convolution integral 또는 Duhamel integral}$$

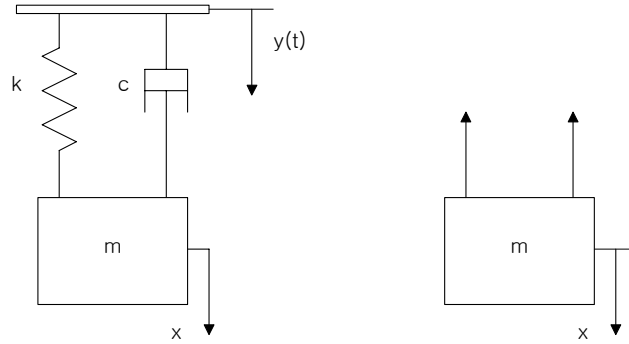
결과적으로

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

만약 $\zeta=0$ (비감쇠계)이면,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

3. 기초 가진에서의 응답



질량의 상대 변위 $z = x - y$ 을 도입하면

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = F(t)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t (-m\ddot{y}) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

4. 응답 스펙트럼 (response spectrum)

특정한 가진함수에 대하여 고유진동수의 변화에 따른 1 자유도계의 최대응답 (변위, 속도, 가속도 또는 다른값)의 변화 양상을 나타내는 그래프를 응답 스펙트럼이라하며 지진과 관련된 설계에 널리 사용된다.

일단 특정한 가진함수에 대한 응답 스펙트럼이 얻어지면 최대 응답을 구하기 위하여 계의 고유진동수만 알면 된다.

가진력이 확정된 수식의 형태가 아닐 경우,

$$x(t) \big|_{\max} = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin\omega_n(t-\tau) d\tau \big|_{\max}$$

a) 기초 가진의 응답 스펙트럼

지진으로 인해 바닥으로부터 진동을 받는 기계나 구조물의 설계는 기초를 통해 가진되는 경우의 응답 스펙트럼이 유용하게 쓰인다.

자유진동하는 비 감쇠계에서 조화운동의 경우는 다음의 관계가 성립한다.

$$\ddot{x}|_{\max} = -\omega_n^2 x|_{\max} \quad \dot{x}|_{\max} = \omega_n x|_{\max}$$

따라서

S_a : 가속도 스펙트럼

S_v : 속도 스펙트럼

S_d : 변위 스펙트럼

$$S_d = \frac{S_v}{\omega_n}, \quad S_a = \omega_n S_v$$

감쇠계의 경우,

S_a : 의사(pseudo) 가속도 스펙트럼

S_v : 의사(pseudo) 속도 스펙트럼

S_d : 의사(pseudo) 변위 스펙트럼

$$S_d = \frac{S_v}{\omega_n}, \quad S_a = \omega_n S_v$$

상대속도 $\dot{z} = \dot{x} - \dot{y}$ 의 스펙트럼을 구하기 위하여

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y} e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

를 미분하면

$$\dot{z}(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} \cdot [-\zeta \omega \sin \omega_d(t-\tau) + \omega_d \cos \omega_d(t-\tau)] d\tau$$

를 다시 표현하면

$$\dot{z}(t) = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{P^2 + Q^2} \sin(\omega_d t - \phi)$$

$$P = \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{\zeta \omega_n \tau} \cos \omega_d \tau d\tau$$

$$Q = \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{\zeta \omega_n \tau} \sin \omega_d \tau d\tau$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{-(P\sqrt{1-\zeta^2} + Q\zeta)}{(P\zeta - Q\sqrt{1-\zeta^2})} \right]$$

속도의 응답 스펙트럼

$$S_v = |\dot{z}(t)|_{\max} = \left| \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{P^2 + Q^2} \right|_{\max}$$

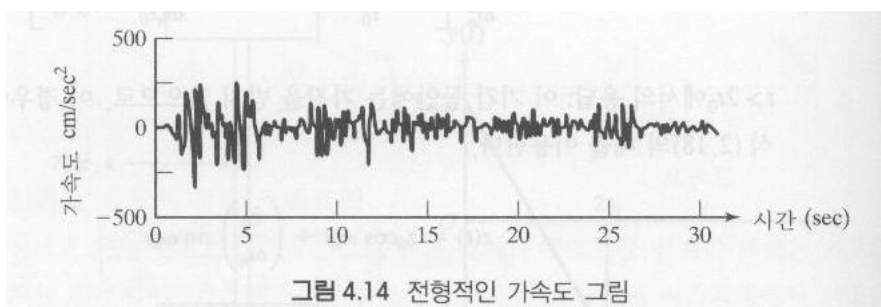
따라서 의사 스펙트럼은

$$S_d = |z(t)|_{\max} = \frac{S_v}{\omega_n}$$

$$S_a = |\ddot{z}(t)|_{\max} = \omega_n S_v$$

b) 지진의 응답 스펙트럼

전형적인 지진 가속도



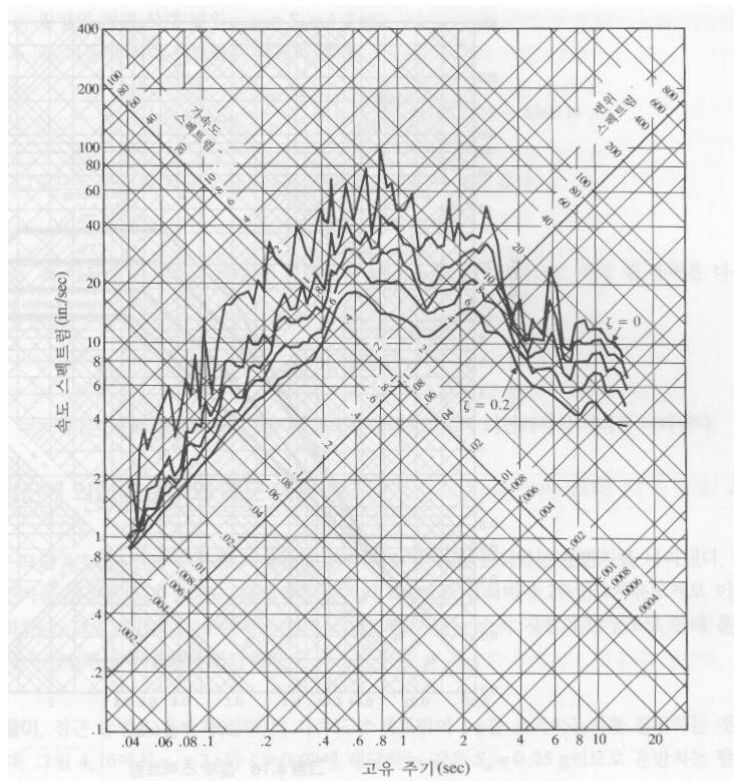


그림 4.15 전형적인 지진[4.12]의 응답 스펙트럼 임페리얼(Imperial) 골짜기에서 1940년 5월 18일에 발생한 지진에 대해 $\zeta = 0, 0.02, 0.05, 0.10, 0.20$ 의 경우)

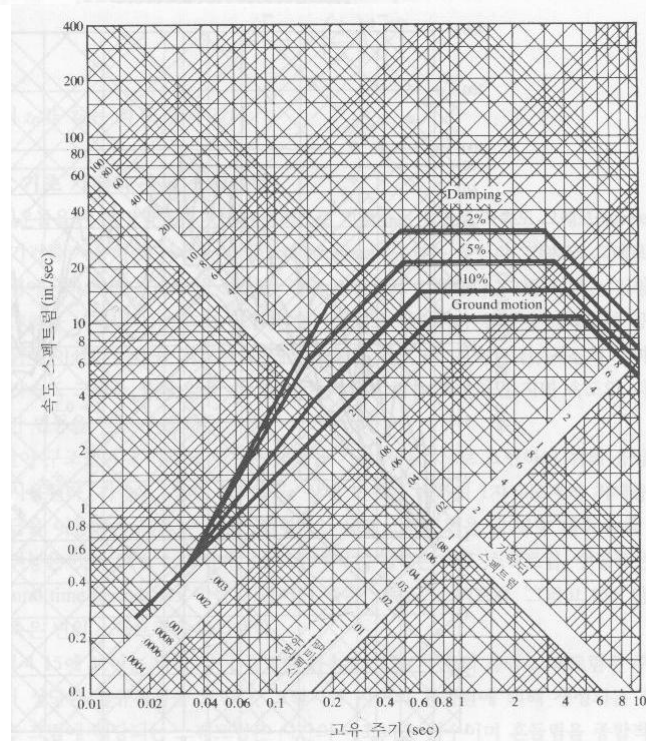


그림 4.16 설계 스펙트럼

5 Laplace 변환

미분방정식 $\Rightarrow$ L.T. $\Rightarrow$ 대수방정식
 $\Rightarrow$ Inverse L.T. $\Rightarrow$ Solution

$$L(f) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = L^{-1}(F(s))$$

임의의 하중을 받는 감쇠 진동시스템의 운동방정식

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

양변을 Laplace 변환을 취하면

$$m[s^2\bar{x}(s) - x(0)s - \dot{x}(0)] + c[s\bar{x}(s) - x(0)] + k\bar{x}(s) = \bar{F}(s)$$

로 되며, 이로부터 Laplace 변환된 변위, $\bar{x}(s)$ 를 구할 수 있다.

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{ms^2 + cs + k} + \frac{(ms + c)x(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + cs + k}$$

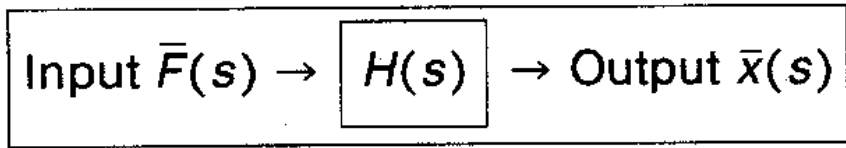
실제 변위, $x(t)$ 는 이를 역변환하면 구할 수 있다.

강제진동만을 고려하는 경우는

$$\bar{x}(s) = H(s) \bar{F}(s)$$

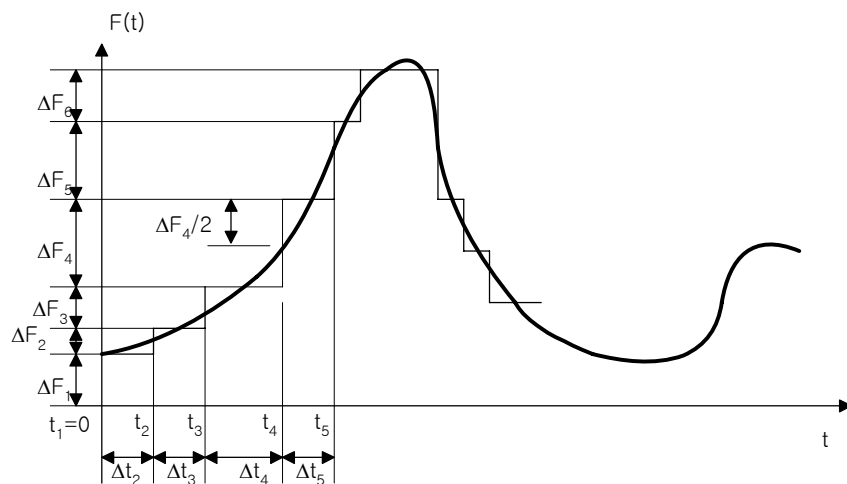
로 표시되며, 여기서 $H(s)$ 는 시스템 전달함수(system transfer function)이라 한다.

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

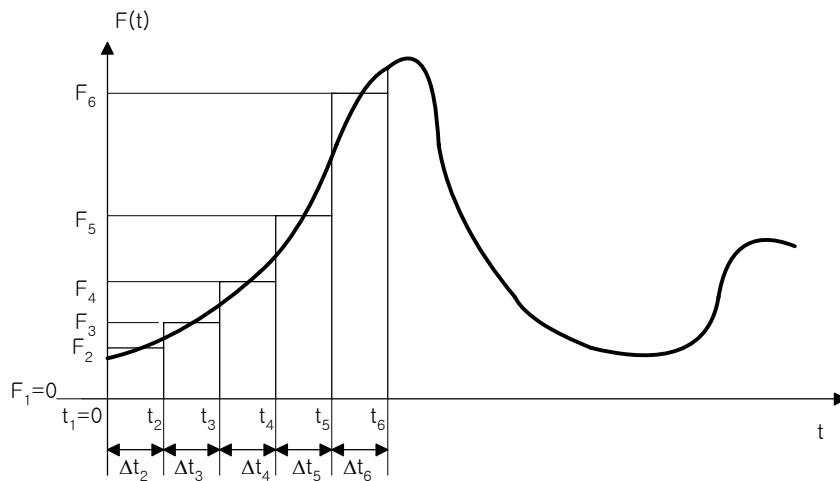


6 수치방법을 이용한 불규칙적인 가진력에 대한 응답

방법1)



방법2)



방법3)

