확률및통계

제5주 확률 : 사건의 확률과 확률의 성질

hylee@silla.ac.kr

* 일상생활 : 거의, 틀림없이, 아마도, 거의 불가능 ====> 객관적인 수치 (확률론)

예제 (통계학에서의 확률론의 이용)

- 확률 : 동전을 15번 던져서 12번 이상 앞면이 나오는 확률 = 0.018
  11번 이상 앞면이 나오는 확률 = 0.059
- 통계 응용: 최면술사 ➔ 최면술이 근육통 치료에 효과가 있다고 주장
  근거 : 15명 중 12명 치유 => 타당한가??
  효과가 없다면 자연 치유율 : 50 % => 15명 중 12명 이상 치유확률 0.018
  효과가 있다고 생각하는 것이 바람직!

용어설명

- 실험 : 다양한 결과가 예측되는 행위 일체
  여러 개의 간단한 실험(Trial)이 모여서 하나의 실험(Experiment)을 이루기도 한다.
- 표본공간 : 모든 가능한 결과들의 모임 $\Omega : Sample - space$
- 근원사건 : 표본 공간을 이루는 개개의 결과 $\omega_1, \omega_2, \cdots$
- 사건 : 근원사건 들의 집합. 표본 공간의 부분집합 $A, B, \cdots$

예제

- 동전 두 번 던지기 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$ B:두 번 모두 앞면= $\{TT\}$
- 예제 1 : X:여당 후보에 투표, Y:야당 후보에 투표

  B: 두 번 모두 야당만 선택 = $\{YY\}$
- 앞면이 나올 때까지 동전 던지기 : $\Omega=\{H, TH, TTH, \cdots\}$ ➔무한 표본공간

  A=5번 이상 던진다 = $\{TTTTH, TTTTTH, \cdots\}$
- 버스 전용 차로제 위반 차량 조사

  만약 143대만 대상으로 한다면 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 143\}$ ➔이산 표본공간

  A=60% 이상의 차가 위반 = $\{86, 87, \cdots, 143\}$

  (143*0.6=85.8)
- 사람의 키 측정 : $\Omega=\{0cm, \cdots, 300cm\}$ ➔연속 표본공간

사건의 확률과 확률의 성질

사건의 확률

- $P(A)$: 사건 A : A 가 일어날 확률
- 한 사건의 확률은 동일한 조건 하에서 실험을 반복할 때, 그 사건이 일어나리라 예상되는 횟수의 비율.

$$P(A) = \frac{A\text{가 일어나리라 예상되는 횟수}}{\text{전체 실험의 횟수}}$$

eg. 대칭의 동전 던지기 => $P(H) = \frac{1}{2}$

확률의 성질

- 모든 사건에 대하여 $0 \le P(A) \le 1$
- $P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i)$
- $P(\Omega) = \sum_{w_i \in \Omega} P(w_i) = 1$

균일확률모형

- 근원사건 들이 모두 같은 정도로 일어나리라고 예상되는 경우에 균일확률모형을 적용한다.

$$\Omega = \{w_{1,} \cdots, w_k\} \Rightarrow P(w_i) = \frac{1}{k} \quad \text{for all } i \,.$$

$$P(A) = \frac{\#(A)}{k} \qquad \#(A): \ A \text{ 의 원소의 개수}$$

상대 도수의 수렴치로서의 확률과 사건들의 관계

상대 도수의 수렴치로서의 확률

- 연역적 방법을 사용할 수 없는 경우에는 귀납적 방법을 이용하여 확률을 계산한다.

$$r_N(A):\text{실험을 } N\text{번 반복할 때 } A\text{의 상대도수} = \frac{A\text{가 일어난 횟수}}{N}$$

* $N \to \infty$일 때 $r_N(A) \to P(A)$라는 사실을 이용하여
N이 클 때 $r_N(A)$를 $P(A)$ 의 추정치로 쓸 수 있다.

사건들의 관계

* A, B : 사건

- 여사건: $A^C = \{w \in \Omega : w \notin A\}$
- 합사건: $A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \quad or \quad w \in B\}$
- 곱사건: $A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \quad and \quad w \in B\}$

*배반사건
A, B: 배반사건
if $A \cap B = \phi$

확률법칙

- 여사건의 확률법칙: $P(A^C) = 1 - P(A)$
- 합사건의 확률법칙: $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$
- 배반사건의 경우 : $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$

조건부 확률

- : 두 사건 A, B
- $P(B \mid A) = A$ 가 일어난 상황에서 B 가 일어날 확률

$$= \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$$

곱사건의 확률법

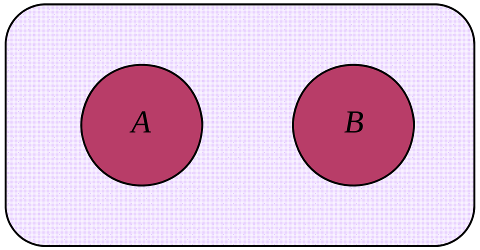
- A, B : 두 사건
  - $P(A \bigcap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$

독립성

- 한 사건이 일어났는지의 여부가 다른 사건의 확률에 영향을 미치지 않을 때 그 두 사건은 서로 독립이라고 한다. 즉, 다음 중 하나를 만족할 때, A, B 는 서로 독립이라고 한다.

$$P(A) = P(A \mid B),\quad P(B) = P(B \mid A),\quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- 주의
  - A, B 가 배반이라는 것과 독립이라는 정의의 명확한 이해 필요.

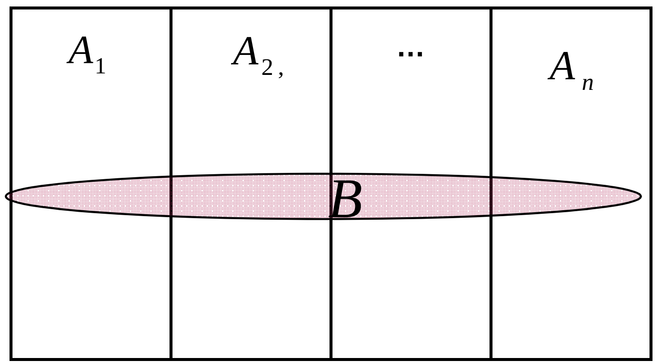


=> 배반사건 (떨어져 있다고 독립이 아님!!)

표본 공간의 분할 (PARTITION)

$A_1, A_{2,} \cdots, A_n :$ 표본공간의 분할 **(Partition)**

- If..
$$\begin{cases} A_1, \cdots, A_n : & \text{배반사건} \\ A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \end{cases}$$



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

총 확률의 법칙과 베이즈 정리

총 확률의 법칙 (Law of total prob.)

- B : 사건 $A_1, A_2, \cdots, A_n$: Partition

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$
$$= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

베이즈 정리 (Bayes' Rule)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$: 분할 B: 사건

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)} \qquad (i : 1, \cdots, n)$$

Thank You!