미적분학 - 제 1 장 극한

채갑병[1]

2010년 3월 18일

제 1 장 극한

1.1 수열의 극한

정의 1. *자연수의 집합* $\mathbb{N}$ *에서 정의된 실함수* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *을 수열 (sequence) 라 하며 각* $n \in \mathbb{N}$ *에 대하여* $f(n) = a_n$ *일때, 이수열을*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

와 같이 나타낸다.
Notation : $\{a_n\}$

정의 2. a *의* $\epsilon-$*근방(neighborhood) :* a *를 포함한 개구간(open interval)*

$$N_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

예제 3. *개구간* $(3 - 0.1, 3 + 0.1)$ *은 3의* $0.1-$*근방 즉* $N_{0.1}(3)$*이다.*

정의 4. a *의* $\epsilon-$*근방(neighborhood) 에서 점* a*를 빼어버린 집합, 즉*

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) - \{a\} = N_\epsilon(a) - \{a\} = (a - \epsilon, a) \cup (a, a + \epsilon)$$

을 a *를 제거한* a*의* $\epsilon-$*근방(deleted* $\epsilon-$*neighborhood)이라 부르고* $N^*_\epsilon(a)$*라 쓴다.*

예제 5.

1. $\{\frac{3n}{n+1}\}$
2. $\{2 - \frac{1}{n}\}$
3. $\{2 + (-1)^n\}$
4. $\{n\}$

예제 6. *수열* $\{\frac{3n}{n+1}\}$ *의 값 중에서* $(3 - 0.1, 3 + 0.1)$ *에 들어가는 첫번째 항은 ?*

답

$$\frac{3k}{k+1} \leq 3 - 0.1$$

이면 이 k번째 항까지는 구간 $(3 - 0.1, 3 + 0.1)$에 들어 가지 못한다. $k \leq 29$ 이다.

정의 7. *수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, n 이 한없이 커질때 a_n이 일정한 수 $l \in \mathbb{R}$ 에 한없이 가까워 질때, 수열 $\{a_n\}$ 은 l 에 수렴한다(converge)라 하고, l 을 수열 $\{\alpha_n\}$ 의 극한 (limit) 또는 극한값이라 한다.*
$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff$ *(임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 자연수 $N = N(\epsilon)$ 이 존재하여 $n \geq N$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_n - l| < \epsilon$ 이다).*
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff$ *(임의의 실수 K 에 대하여 자연수 $N = N(k)$ 이 존재하여 $n \geq N$ 인 모든 자연수 n 에 대해 $a_n > K$ 이다).*

예제 8. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *을 증명하여라.*

증명 $\epsilon > 0$ 을 주어진 양수라 하자.
Want : 자연수 N을 찾아 $n \geq N$ 인 모든 자연수 n 에 대해

$$|1/n - 0| < \epsilon.$$

즉,

$$1/n < \epsilon \iff 1/\epsilon < n$$

이므로 $1/\epsilon < N$ 인 자연수 N 을 선택하면 $1/N < \epsilon$ 이고, $1/\epsilon < N \leq n$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음이 성립한다.

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

정리 9. *수열 $\{a_n\}$ 이 수렴 하면 극한은 유일 하고 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.*

주의 10. *임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $|l - l'| < \epsilon$ 이란 말은 $l = l'$ 이다.*

정리 11. *수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 수렴하면, 즉 $\lim a_n = M$, 이고 $\lim b_n = L$,이면 다음이 성립한다.*

(1)

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = M + L,$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ML,$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{M}{L}, \quad \text{단, } b_n \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

예제 12. *$a_n = 1/n - n^2$ 과 $b_n = n^2$ 이면 $\lim a_n = \infty$, 이고 $\lim b_n = \infty$, 이지만 $\lim(a_n + b_n) = 0$이다.*

예제 13. *$a > 0$ 일때 다음이 성립함을 보여라.*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

증명 만약 $a = 1$ 이면, 자명.
만약 $a > 1$ 이면, $\sqrt[n]{a} > 1$ 이므로 $a_n > 0$인 수열을 택하여 $\sqrt[n]{a} = 1+a_n$ 이라 놓자

$$a = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \cdots + a_n^n \geq 1 + na_n,$$

$$(a - 1)/n \geq a_n > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} (a - 1)/n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n) = 1.$$

만약 $a < 1$ 이면, $b = 1/a$ 라 놓자. (생략.)

정의 14. *모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq a_{n+1}$ 일때, $\{a_n\}$ 을 단조 증가 수열 (monotone increasing sequence) 이라 한다*
모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq a_{n+1}$ 일때, $\{a_n\}$ 을 단조 감소 수열 (monotone decreasing sequence) 이라 한다
단조 감소 또는 단조 증가 수열 $\Longleftrightarrow$ 단조 수열

정리 15. *위로 유계인 증가 수열은 수렴 한다.*

주의 16. *아래로 유계인 감소 수열은 수렴 한다.*

예제 17. *$a_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$ 이 수렴 함을 보여라.*

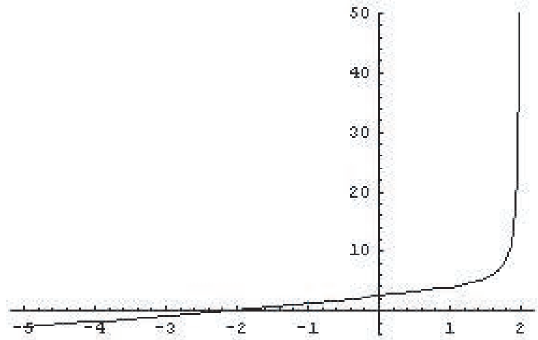
증명 이항정리에 의해 증가 수열 이고 $2^{n-1} \leq n!$(수학적 귀납법으로 증명) 을 이용 하여 3에 의해 bounded 됨을 증명

주의 18.

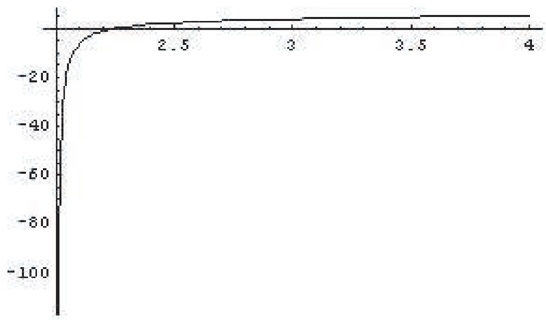
$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

```
In[1]:= t = {(x^2 - 5) / (x - 2)};
```

```
In[6]:= p = Plot[Evaluate[t], {x, -5, 2}];
```




```
In[7]:= pp = Plot[Evaluate[t], {x, 2, 4}];
```



1.2 함수의 극한

예제 19.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-5}{x-2} \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$

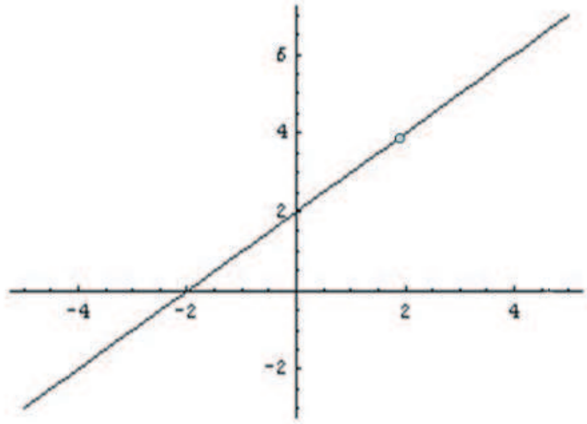
정의 20. *함수 f 가 상수 a 가 제외된 a 의 $\epsilon-$근방에 있는 모든 점에서 정의되었다고 하자. 이때 x 가 a에 충분히 가까이 갈때 $f(x)$ 가 일정한 실수 L에 한없이 가까이 가면 L을 $x = a$에서의 $f(x)$의 극한값 또는 극한 이라하고 이것을 다음과 같이 나타낸다.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

정의 21. *함수의 극한 ($\epsilon - \delta$ 정의)*
임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $\delta(\varepsilon) > 0$ 가 존재해서 $0 < |x-a| < \delta$ 이면 $|f(x)-L| < \epsilon$ 이다. 여기서 δ 는 ε의 함수이다.

```
In[8]:= f = {(x^2 - 4) / (x - 2)};

In[11]:= p1 = Plot[f, {x, -5, 5}];
```



x	$f(x) = \dfrac{x^2-5}{x-2}$	$g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
1.9	13.9	3.9
1.99	103.99	3.99
1.999	1,003.999	3.999
1.9999	10,003.9999	3.9999
1.99999	100,003.99999	3.99999
1.999999	10,000,004	3.999999

예제 22.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\epsilon = 1/2$ 이라 잡으면 어떤 $\delta > 0$에 대해서도, $|f(x) - L| > 1/2$ 인 x 가 존재한다.

정의 23. *x 가 a에 충분히 가까이 가는 두가지 방법 : 왼쪽에서 오른쪽에서 이때의 극한 값을 각각 우극한 $= \lim_{x\to a^+} f(x)$, 좌극한 $= \lim_{x\to a^-} f(x)$ 이라 한다*

x	$f(x) = \dfrac{x^2-5}{x-2}$	$g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
2.1	−5.9	4.1
2.01	−95.99	4.01
2.001	−995.999	4.001
2.0001	−9,995.9999	4.0001
2.00001	−99,995.99999	4.00001
2.000001	−999,995.999999	4.000001

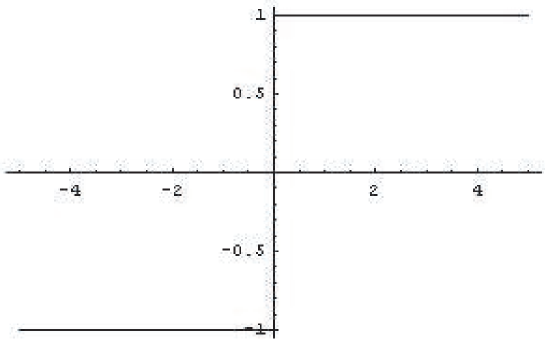
예제 24.

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

```
In[1]:= f = { x / Abs[x]};

In[2]:= p2 = Plot[f, {x, -5, 5}];
```



보조정리 25. $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 극한이 존재한다 $\Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

예제 26. $\lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b$ 임을 보여라.

증명

$$|mx+b-ma-b| = |m||x-a| < |m|\delta = \epsilon$$

$\delta = \epsilon/|m|$ 으로 잡을 수 있다.

예제 27. $a > 0$ 일 때
$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ 임을 보여라.

증명

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}|\frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

$\delta = \epsilon(\sqrt{a})$ 으로 잡을 수 있다.

예제 28. $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ 임을 보여라.

증명

$$|x^2 - 2^2| = |x+2||x-2| < |x+2|\delta$$

우리는 여기서

$$|x+2|\delta < \varepsilon$$

이기를 원한다. 하지만 δ를 ε에 대한 함수로 나타내기가 불가능하다.
만약

$$|x-2| < 1$$

이라 하면

$$1 < x < 3$$

이고

$$3 < x+2 < 5$$

이다. 그러므로

$$\delta = min\{1, \varepsilon/5\}$$

이라 하면

$$|x^2 - 2^2| = |x+2||x-2| < |x+2|\delta \leq 5\frac{\varepsilon}{5} < \varepsilon$$

이다.

예제 29. $\lim_{x\to 2} \sin\frac{\pi x}{2} = 0$ 에 대하여, (a)$\varepsilon = \frac{1}{2}$, (b) $\varepsilon = 0.1$ 인 경우에 대응되는 $\delta > 0$ 를 구하여라.

증명 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여,

$$0 < |x-2| < \delta \text{이면 } |\sin\frac{\pi x}{2} - 0| < \varepsilon$$

이 성립하는 $\delta > 0$를 찾아보자.

(a). $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 에 대하여, $0 < |x-2| < \delta$ 일 때

$$-\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi x}{2} - 0 < \frac{1}{2}$$

이 성립하는 $\delta > 0$를 찾아보자. 컴퓨터나 계산기를 사용하여 $x \in [1.666667, 2.333333]$ 일때 $y \in [-0.5, 0.5]$ 임을 알수 있다. 그러므로

$$\delta = 2.333333 - 2 = 2 - 1.666667 = 0.333333$$

으로 결정된다.

정리 30. *(정리 1.5)*
$\lim_{x\to a} f(x) = b$ 이기 위한 필요충분조건은 $\lim_{n\to\infty} p_n = a$를 만족하는 임의의 수열 $\{p_n\}$(단, $p_n \neq a$) 에 대하여 $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = b$인 것이다.

증명

$\Longrightarrow$] (필요 조건)

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$

($\epsilon > 0$ 이 주어졌다고 하자.) $\Rightarrow$ ($0 < |x-a| < \delta$ 이면 $|f(x) - b| < \epsilon$)

(2) ($\lim_{n\to\infty} p_n = a$) $\Rightarrow$ (위의 δ 에 대하여 자연수 N 이 존재하여, 모든 $n > N$에 대하여 $0 < |p_n - a| < \delta \Rightarrow \lim_{x\to a} f(p_n) = b$

$\Longleftarrow$] (충분 조건)

($\lim_{x\to a} f(x) \neq b$) $\Rightarrow$ (적당한 $\epsilon_0 > 0$가 존재해서 어떠한 $\delta > 0$ 를 잡아도 $0 < |x-a| < \delta$ 이고 $|f(x) - b| > \epsilon_0$ 을 만족시키는 x 가 존재한다 .)

$\delta = \frac{1}{n}$이라 하면 $0 < |p_n - a| < 1/n$이고 $|f(p_n) - b| > \epsilon_0$ 이 된다. 그러므로 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $\lim_{x\to a} p_n = a$ 이지만, $\lim_{x\to a} f(p_n) \neq b$

정리 31. $\lim_{x\to a} f(x) = M$,와 $\lim_{x\to a} g(x) = L$ 이라 하면 다음이 성립한다.

(1)

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = M + L,$$

(2)

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x) = cM, \ \ c\text{는 상수},$$

(3)

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = ML,$$

(4)

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{M}{L}, \ (\lim_{x\to a} g(x) \neq 0, \ L \neq 0).$$

예제 32.

$$\lim_{x\to 3}(x^2 + 2x + 4) = \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 2x + \lim_{x\to 3} 4.$$

예제 33.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+5}{x^2+2x+4}=\frac{\lim_{x\to 3}2x+5}{\lim_{x\to 3}x^2+2x+4}.$$

예제 34.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

예제 35.

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

예제 36.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

예제 37.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=1/5.$$

예제 38. *(수직 점근선)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.$$

예제 39. *(수평점근선)*

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{1}{(x-5)^3}=\infty.$$

예제 40.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-7}{4x+3}.$$

예제 41.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3+3x^2-8}{7x^4+16x^2+2}.$$

예제 42.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}.$$

정리 43.
실수 a의 근방에 있는 모든 x에 대하여 $f(x)\le g(x)\le h(x)$라 하자. 이때 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$ 이면 $\lim_{x\to a}g(x)=L$ 이다.

예제 44.

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

답

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|.$$

정리 45.

$\lim_{x\to a} f(x) = b$이고 , $g(b) = c$ 라고 하자. 이때 $\lim_{y\to b} g(y) = c$ 일때

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$$

이다.

증명 $\lim_{y\to b} g(y) = c$ 이므로 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $\mu(\varepsilon) > 0$ 존재하여

$$0 < |y-b| < \mu \Longrightarrow |g(y) - c| < \epsilon$$

이다. 또한 $\lim_{x\to a} f(x) = b$이므로 위의 μ에 대하여 $\delta > 0$가 존재해서

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \mu$$

이다. 따라서, $f(x) \neq b$ 일때

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - c| < \epsilon$$

이다. $0 < |x-a| < \delta$인 어떤 x에 대해 $f(x) = b$ 일때는 $g(b) = c$ 이므로

$$|g(f(x)) - c| < \epsilon$$

이다. (참고 : 조건 $|f(x)-b| < \mu$ 이기때문에 $f(x) = b$가 되는 상황이 발생하면 $0 < |y-b| < \mu$ 조건을 만족하지 못하므로 $g(b) = c$라는 조건 즉, 그러므로 g가 연속함수라는 조건이 필요하다.)

정의 46. *임의로 주어진 실수 K 에 대하여 $\delta > 0$ 가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$ 이면 $f(x) > K$ 가 성립하는것을*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

임의로 주어진 실수 K 에 대하여 $\delta > 0$ 가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$ 이면 $f(x) < K$ 가 성립하는것을

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

1.3 함수의 연속

정의 47. *함수 f가 a의 근방에서 정의되어 있다고 하자. 이때*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

를 만족하면 f는 $x = a$ 에서 연속이라 한다.

f 가 정의역의 모든 x 에서 연속일때, f 를 연속함수라고 한다.

정의 48. *함수의 연속* $\epsilon - \delta$ *정의*
임의의 $\epsilon > 0$ *에 대하여* $\delta > 0$ *가 존재해서* $|x-a| < \delta$ *이면* $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ *이다.*

주의 49. $cf(c \in \mathbb{R})$, $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}(g \neq 0)$ $f \circ g$ *는 모두 연속함수이다.*

주의 50. *다항함수, 유리함수 (분모가 0 이 아닌 값) 은 모두 연속이다.*
$\ln x$, $\log x$ $\sin y$ *: 연속*

예제 51. *(불연속점의 제거) 함수* $f(x)$*가 연속함수가 되도록* a *의 값을 정하시오.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1. \end{cases}$$

예제 52.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

정의 53.

(1) *함수* f *가 개구간* (a,b)*의 각점* x*에서 연속이면 함수* f *가 개구간* (a,b) *에서 연속이라 한다.*

(2) *함수* f *가 개구간* (a,b)*의 각점* x*에서 연속이고*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{이고} \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

이면 함수 f *가 폐구간* $[a,b]$ *에서 연속이라 한다.*

정리 54. *주어진 두함수가 연속이면 합성함수도 연속 이다.*

정리 55. *(중간값 정리)*
함수 f*가 폐구간* $[a,b]$*에서 연속이라고 하자 .이때* $f(a) < L < f(b)$*이면* $f(c) = L$ *이 되는 실수* c*가* (a,b)*에 적어도 하나 존재한다.*

정리 56. *(최대값과 최소값의 정리)*
$f(x)$ *가 폐구간* $[a,b]$ *에서 연속이면,* $f(x)$ *는* $[a,b]$ *에서 유계이고* $[a,b]$ *에서 최대값과 최소값을 갖는다. 즉 구간* $[a,b]$ *내에 다음을 만족시키는* c *와* d *가 존재한다.*

$$f(c) = max\{f(x)|x \in [a,b]\}, \ \ f(d) = min\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

예제 57.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \tag{1}$$