승진과 토너먼트:1

- 고용주가 근로자로 하여금 최대의 노력을 유도하는 정책가운데 ‘승진’ 이라는 제도가 있음.

- 일반적으로 승진은 임금상승과 연계되어 있음.

- 따라서 승진 함수는 일반적으로 근로자에게 승진을 통해 금전적으로 보상받는 유인을 제공하는 것임.

- 때로는 승진의 목적은 ‘적절한’ 사람을 관리자 직책에 배분하는데 있으나 이 논의는 다소 본 주제와 벗어남.

간단한 수학적 모델

– 여기서 두 명의 근로자가 승진을 위해 경쟁하는 간단한 ‘토너먼트’ 의 예를 살펴보고자 함.

1. 각 근로자(혹은 대리인)가 승진할 확률은 그들의 노력수준에 달려있다.
2. 주어진 ‘경쟁’ 에서 각 근로자의 최적화 노력수준 구하기
3. 사회적으로 효율적인 노력수준
4. 사회적으로 효율적인 노력수준을 실행하기 → Equivalence of tournaments and piece rates

- 우리는 간단한 예제를 통해서 어떤 기업도 토너먼트를 통해서 piece rate 에서 실현할 수 있는 결과를 도출할 수 있음을 보여주고자 함.

- 회사가 근로자의 모든 생산물을 관측해서 그것에 기초한 piece rate 를 실행하는 것은 매우 비현실적임.

- 따라서 회사 입장에서 piece rate 과 동일한 결과를 얻을 수 있다면 보다 쉬운 방법인 승진제도를 활용하는 것이 바람직함.

- 특히 근로자의 성과를 측정하는데 오류가 발생하는 경우 승진제도가 더 잘 작동할 것임.

The Probability of winning the promotion

– 두 명의 근로자의 생산량이 다음과 같이 주어짐

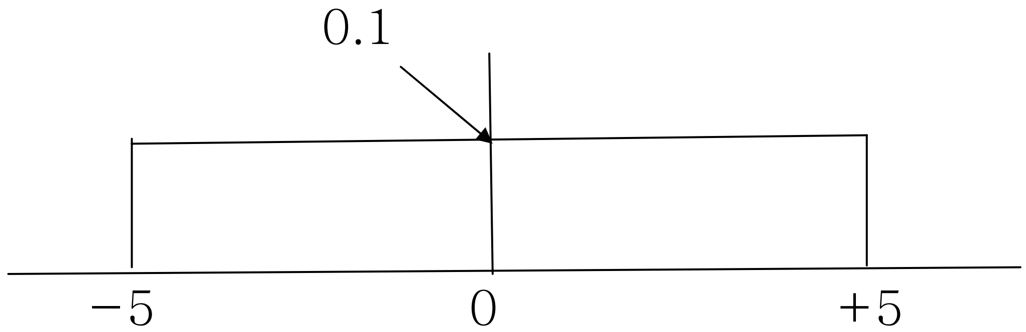
근로자 1의 생산량: $q_1 = d*E_1 + 0.5*\varepsilon$

근로자 2의 생산량: $q_2 = d*E_2 - 0.5*\varepsilon$

– 여기서 ε 는 근로자 1의 상대적 운으로 해석할 수 있음. 앞에 식에서 서로 다른 부호를 넣은 이유는 한 근로자에게 좋은 상황은 상대방 근로자에게 안 좋은 상황을 묘사하기 위함임.

– 여기서 ε 는 random variable → 문제에서 균등분포 [−5, 5] 로 가정함.

ε 의 확률분포함수



− "nature" 가 실수 −5 와 +5 사이의 숫자를 선택함.

− 두 이웃한 정수가 나올 확률은 각각 10%

- 두 근로자 가운데 가장 높은 성과수준을 보여준 근로자 1명이 승진됨.

- 따라서 근로자 1이 승진할 확률은

$$q_1 > q_2 \Rightarrow d*E_1 + 0.5*\varepsilon > d*E_2 - 0.5*\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon > d*(E_2 - E_1)$$

질문: 주어진 두 근로자의 노력수준에서 근로자 1이 토너먼트에서 승리할 확률은 얼마인가?

Case 1:

- $E_1 = E_2$ → 두 근로자의 노력수준이 동일한 경우

- worker 1 wins if $\varepsilon > 0$ → 확률은 0.5

Case 2:

– $E_2 = 0$ → 근로자 2의 노력수준이 0 인 경우

– $Prob(1 \text{ wins}) = Prob(\varepsilon > -E_1)$ → 근로자 1의 노력수준에 달려있음.

– If $E_1 = 0$ → $p_1 = 0.5$

– If $E_1 = 1$ → $p_1 = Prob(\varepsilon > -1) = 0.6$

– If $E_1 = 5$ → $p_1 = Prob(\varepsilon > -5) = 1$

Case 3:

- $E_2 = 5$ → 근로자 2의 노력수준이 매우 높은 경우

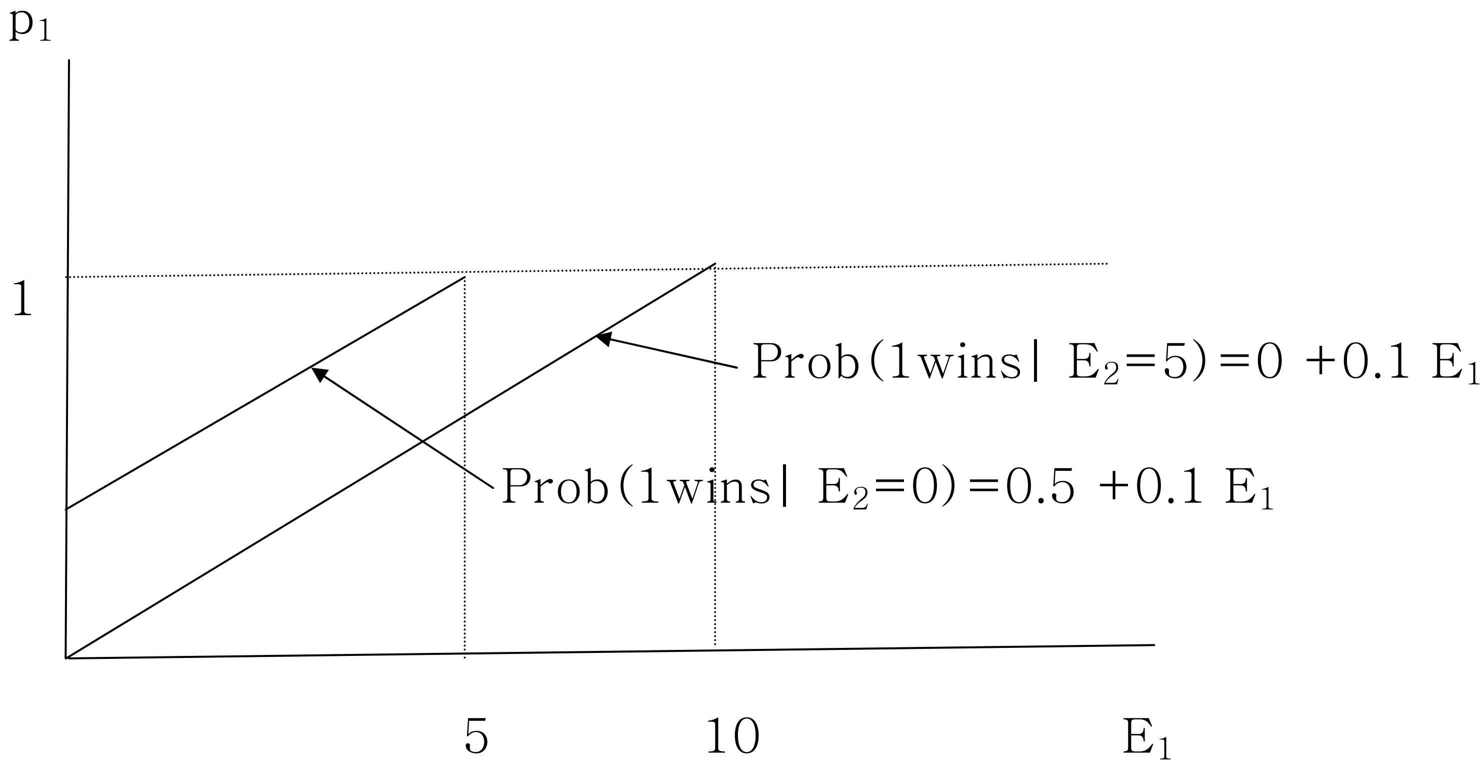
- $Prob(1 \text{ wins}) = Prob(\varepsilon > 5 - E_1)$

- If $E_1 = 0$ → $p_1 = Prob(\varepsilon > 5) = 0$

- If $E_1 = 5$ → $p_1 = Prob(\varepsilon > 0) = 0.5$

- If $E_1 = 10$ → $p_1 = Prob(\varepsilon > -5) = 1$

근로자 1의 노력수준과 승진확률 그래프



- $d=1$ 인 경우, 각 근로자의 승진확률 함수는 아래와 같음.

$$p_1 = 0.5 + 0.1(E_1 - E_2)$$

$$p_2 = 0.5 + 0.1(E_2 - E_1)$$

- 상대적 운이 균등분포라는 가정아래 보다 일반적인 형태의 승진함수는

$$p_i(E_i , E_j) = 0.5 + \alpha d(E_i - E_j)$$

where $\alpha = 1/R$ → R is the range of the distribution

근로자의 승진확률은

– 자신의 노력이 증가할수록 증가하며 상대방의 노력이 증가할수록 감소함.

– 상대적 노력수준이 중요함.

– 경쟁이 '공정' 하다면 동일한 능력을 보유한 근로자들은 동일한 노력을 할 것이며 승진의 확률도 동일하게 됨.

– 생산량 측정의 오차(noise)가 증가함에 따라 승진확률은 감소함

Ex: ε ~uniform [−10, 10]

➔ $p_1 = 0.5 + 0.05(E_1 - E_2)$ & $p_2 = 0.5 + 0.05(E_2 - E_1)$

– 근로자의 승진확률은 자신의 생산성 d 에 영향을 받음.

Optimal Individual Effort, given the contest rules

– 주어진 토너먼트 조건에서 각 개인의 기대효용을 극대화 하는 노력수준 구하기.

모델구조

– "loser" 의 보상은 'a'

– "winner" 의 보상은 'a + S' → S 는 상금의 크기(spread)

– 노력의 비효용함수 → $C(E) = E^2/2$

근로자 1의 기대 효용함수

$$EU_1 = p_1(E_1, E_2)[a + S] + [1 - p_1(E_1, E_2)]a - E^2/2$$

$$= a + p_1(E_1, E_2)S - E^2/2$$

$$= a + [0.5 + \alpha d(E_1 - E_2)]S - E^2/2$$

근로자 1의 기대효용 극대화

$$\mathrm{Max}_{E1}\ EU_1 = a + [0.5 + \alpha d*(E_1 - E_2)]*S - E^2/2$$

F.O.C: $\alpha d*S - E_1 = 0$

$\rightarrow E_1 = \alpha d*S$

Lesson

- 노력 수준은 상금의 크기가 증가할 수록 증가함.
- 생산성이 증가할수록 노력의 한계효과의 크기도 증가함.
- α의 증가 (측정오차의 감소)는 노력수준을 증가시킴
- 노력수준과 ‘a’ 와는 독립적임.
- α 의 균등분포 가정에서 상대방의 노력수준은 자신의 최적화하는 노력수준에 영향을 미치지 않음.
- 만일 α 의 분포가 정규분포라면 다른 사람의 노력수준은 나의 노력수준에 영향을 줌 → 내쉬균형을 발견해야 함.
- 주어진 a, α, d 수준에서 두 근로자 모두 **동일한 노력**을 기울임.

Socially Efficient Effort Levels

－기대생산함수 $Q = d\,E_1 + d\,E_2 = d\,(E_1 + E_2)$

－노력의 비효용함수는 근로자 1과 2가 $E^2/2$ 로 동일함

$$\text{Max}_{E1,\,E2}\ d*(E_1 + E_2) - E_1^2/2 - E_2^2/2$$

F.O.C: $d - E_1 = 0$ & $d - E_2 = 0$

In general, $E_i = d$ for $i=1,2$