Option Pricing Models I

Department of Finance, Hallym University
Sun-Joong Yoon, Ph.D.

Overview

- 옵션 가격 평가 (Option Pricing)
  - 옵션은 기초자산에 의해 가격이 결정되기 때문에, 옵션의 가격을 평가하기 위해서는 기초자산의 분포에 대한 가정이 필요!!
    - 이항분포 (Binomial): 주식가격은 1기간에 대해서 이항분포를 따른다
    - 삼항분포(Trinomial):주식가격은 1기간에 대하여 3항분포를 따른다
    - 점프 확산모형 (Jump Diffusion): 주식가격은 연속시간에 대하여 점프 확산 프로세스 (jump diffusion stochastic process)를 따른다.
- 이산 모형 (Discrete Model)
  - 이항분포모형 (Binomial tree model; Lattice method; CRR model)
  - Cox, Ross and Rubinstein (1979)
  - 옵션 기초자산의 가격 분포를 이항 과정으로 표현한 후, 이를 바탕으로 옵션 가치 평가
- 연속모형 (Continuous Model)
  - 로그-정규분포 모형 (Log-normal diffusion process; Geometric Brownian motion; BS model)
  - Black and Scholes (1973)
  - 기초자산의 가격 분포를 대수정규분포로 가정한 후, 이를 바탕으로 옵션 가치 평가

No Arbitrage Argument

- 무차익거래 조건
  - 일반적으로 파생상품 가격은 무차익거래 조건에 의해서 결정됨
  - 이러한 무차익거래조건을 적용하기 위해서는 시장은 완전(complete)해야 한다.
    - 즉 옵션은 기초자산에 의해 복제 가능해야 한다
    - i.e. Binomial Model, Black-Scholes-Merton model

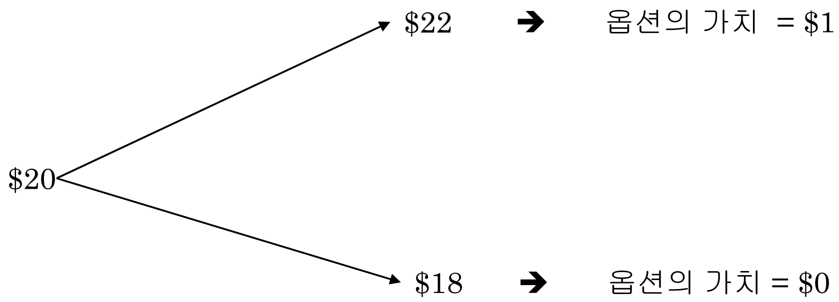
- 포트폴리오 합성 (Portfolio Synthesizing)
  - 주식 + 채권 ➔ 옵션
  - 주식 + 옵션 ➔ 채권
  - 채권 + 옵션 ➔ 주식

I. Binomial Tree Model

Basic Illustration

❒ 옵션 + 주식 = 합성 채권

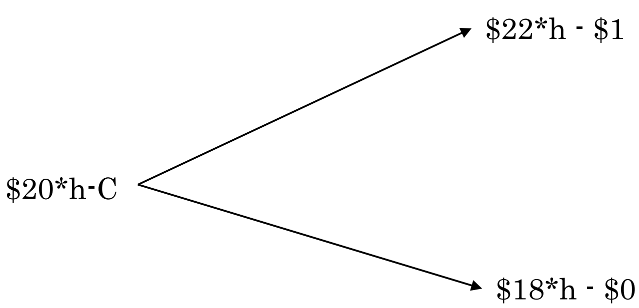
- ❖ 현재 주식가격은 20$
- ❖ 3개월 후 주식의 가격은 $22이거나 혹은 $18
- ❖ 3개월 무위험이자율은 연속복리 기준 연 12%
- ❖ 행사가격이 $21이고 만기가 3개월인 유럽형 콜 옵션의 가격은?



Basic Illustration

❒ 무위험 포트폴리오 (Risk-less Portfolio; hedge portfolio)의 구성

- ❖ 주식을 h 주 매수 + 콜옵션 1계약 매도



By construction, $22h – 1 = 18h - 0$

➔ $h = 0.25$

➔ 3개월 후 주가에 관계없이 무위험 포트폴리오의 가치 = 22*0.25 – 1 = $4.50

➔ $20*0.25 – C = 4.50 * e^{-0.12*0.25}$

➔ C = $0.63

Single Period Binomial Model

❒ 일반화

$$S_0{*}h - C \;\nearrow\; S_u{*}h - C_u = uS_0{*}h - C_u$$

$$S_0{*}h - C \;\searrow\; S_d{*}h - C_d = dS_0{*}h - C_d$$

$$\text{By construction}: \; S_u h - C_u = S_d h - C_d \Rightarrow h^* = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)}$$

$$\begin{cases} \text{포트폴리오의 현재가치} = \left(S_u h^* - C_u\right)e^{-rT} \\ \text{포트폴리오의 구성비용} = S_0 h^* - C \end{cases} \Rightarrow \left(S_u h^* - C_u\right)e^{-rT} = S_0 h^* - C$$

$$\Rightarrow C = S_0 h^* - \left(S_u h^* - C_u\right)e^{-rT} = S_0 \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)} - \left(S_0 u \times \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)} - C_u\right)e^{-rT}$$

$$= \frac{C_u - C_d - \left(uC_u - uC_d - uC_u + dC_u\right)e^{-rT}}{u-d}$$

$$= e^{-rT}\left(pC_u + (1-p)C_d\right), \quad p = \frac{e^{rT} - d}{u-d}$$

Single Period Binomial Model

❒ 헷지 비율 (Hedge Ratio)

$$h^* = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{\Delta C}{\Delta S}$$

❒ Note

- 1) 주가의 상승 확률
  - 주식이 상승하고 하락할 것이라는 각 개별 투자자의 의견은 옵션 가격에 반영되지 않음 !
- 2) 주식의 기대 수익률
  - 투자자 A는 15%의 기대 수익률을 예상
  - 투자자 B는 13%의 기대 수익률을 예상
  - 그러나 두 경우에 있어서 콜옵션의 가격은 동일!
- 3) 위험 프리미엄이 존재하지 않는다.
- 1), 2), 3) 세 주장은 모두 동일한 배경을 의미한다.

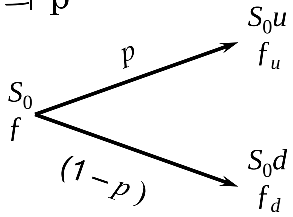
- 이러한 결과는 위험중립가격평가(risk-neutral valuation)이 사용될 수 있음을 보임!!

❒ Questions

- 주식의 기대 수익률 vs. 옵션 가격
- 투자자들의 위험선호(회피)성향 vs. 옵션가격?

Risk-Neutral Valuation

- 확률로서의 p



$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

  - 상승과 하락을 대변하는 p와 1-p를 확률로 해석할 수 있다. (모든 확률 특성을 보유함)
  - 파생상품의 가격은 만기에 기대되는 payoff를 위험중립상태에서 무위험이자율로 할인한 값이 된다.

- 위험중립 가치평가 (Risk Neutral Valuation)

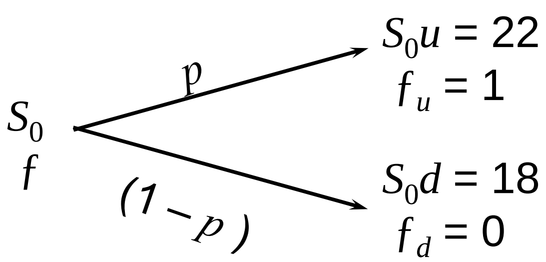
$$C = e^{-rT} \times E^Q(X) = e^{-rT}\left[pC_u + (1-p)C_d\right]$$

  - 위험중립 하에서 기초자산의 상승 하락 확률은 p와 1-p와 같고 만기시에 기대되는 주식의 가격은 S_0e^{rT}

- *위험중립 세상 하에서 모든 금융자산은 무위험이자율의 동일한 기대 수익률을 가진다*

Risk-Neutral Valuation

- 예제 (앞서 살펴본)



- RN valuation 공식을 사용하면

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{e^{0.12 \times 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$

옵션의 가격은?

$e^{-0.12\times 0.25}(0.6523\times 1 + 0.3477\times 0) = 0.633$

Single Period Binomial Model

❒ 예제 1

- 현재 주식의 가격은 \$100이며, 3개월 후의 주식가격은 \$120 또는 \$80가 될 수 있다고 가정 / 3개월 무위험이자율은 연 12%
- 행사가격이 \$105이고 만기가 3개월인 유럽형 콜옵션의 가격은?
- 동일한 조건의 유럽형 풋옵션의 가격은?

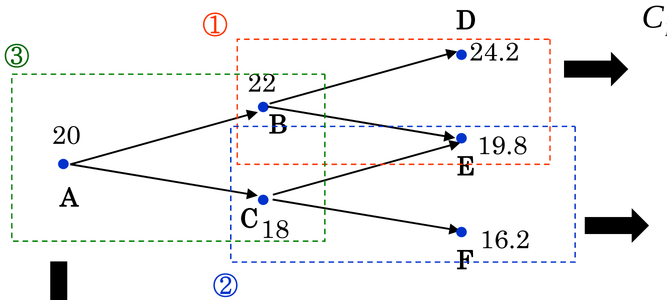
❒ 예제 2

- 예제 1과 동일한 가정하에서
- 행사가격이 \$95이고 만기가 3개월인 유럽형 콜옵션의 가격은?
- 동일한 조건하에서 유럽형 풋옵션의 가격은?

Two Periods Binomial Model

❒ 2기간 모형의 예제

- 현재 주식가격은 \$20
- 3개월 마다 주가는 10%상승 혹은 10% 하락
- 무위험 이자율은 연속복리 기준 연12%
- 행사가격이 \$21인 6개월 만기의 유럽형 콜 옵션 가격은?



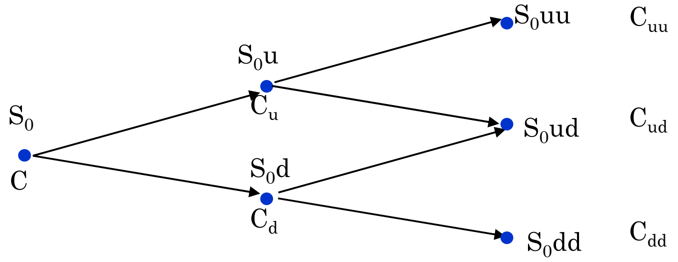
$$C_B = e^{-0.12\times0.25}\left(p\times C_D + (1-p)C_E\right)$$
$$= e^{-0.12\times0.25}\left(0.6523\times3.2 + 0.3477\times0\right)$$
$$= 2.0257$$

$$C_C = e^{-0.12\times0.25}\left(p\times C_E + (1-p)C_F\right)$$
$$= e^{-0.12\times0.25}\left(0.6523\times0 + 0.3477\times0\right)$$
$$= 0$$

$$C_A = e^{-0.12\times0.25}\left(p\times C_B + (1-p)C_C\right)$$
$$= e^{-0.12\times0.25}\left(0.6523\times2.0257 + 0.3477\times0\right)$$
$$= 1.2823$$

Two Periods Binomial Model

- 일반화



$$\begin{cases} C_u = e^{-rT}\left[pC_{uu} + (1-p)C_{ud}\right] \\ C_d = e^{-rT}\left[pC_{ud} + (1-p)C_{dd}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = e^{-rT}\left[pC_u + (1-p)C_d\right] \quad \Rightarrow C = e^{-2rT}\left[p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd}\right]$$

- 예제
  - 현재 주식의 가격은 $20
  - 매 3개월마다 주식의 가격은 20%상승하거나 하락
  - 무위험이자율은 연 12%
  - 행사가격이 $18이고 만기가 6개월인 유럽형 콜옵션의 가격은?
  - 동일한 조건의 유럽형 풋옵션의 가격은?

Applications of Binomial Models

- 미국형 옵션의 가치평가
  - 현재 주가는 $100
  - 3개월 후에 주가는 20% 상승하거나 하락
  - 무위험 이자율은 연 12%
  - 행사가격이 $100이며 만기가 6개월인 미국형 콜옵션의 가격은?
  - 동일한 조건의 미국형 풋옵션의 가격은?

- 옵션의 델타 (Delta)

$$\Delta = \partial C / \partial S$$

  - Slide 13의 node B에서의 델타는?
  - Slide 13의 node C에서의 델타는?
  - Slide 13의 node A에서의 델타는?
  - 2기간 이항모형에서 알 수 있듯이, 시간이 지남에 따라 옵션의 델타는 변화함
    - 무위험 포트폴리오를 유지하기 위해서는 rebalancing이 필요

Determination of 'u' and 'd'

- 주가 수익률의 연간 변동성을 σ라 하면,

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}$$

  - 현재 주가가 $50, 주가수익률의 연간 변동성은 30%, 무위험 이자율은 연 5%라고 할 때, 행사가격이 $52이고 만기가 2년인 유럽형 콜 옵션 및 풋 옵션의 가격을 2기간 이항분포 모형으로 계산하면?

- 적정 기간의 선택 (Optimal Selection of Time-Intervals)
  - 이항분포모형을 이용하여 정확한 옵션 가격평가를 하기 위해서는 일반적으로 30기간 이상의 이항과정이 필요
  - 30기간 이항과정: 만기의 주가는 총 ______개의 값을 가질 수 있으며, 주가 변화의 과정은 총 2^{30}(약 10억개)를 고려할 수 있음
  - 위의 예제를 2기간이 아닌 4기간 이항분포모형으로 계산하면?

Other Types of Options

- 위험중립확률의 조정

$$\begin{cases} \text{지수 옵션:} & p = \dfrac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u-d} \\ \text{통화 옵션:} & p = \dfrac{e^{(r-r_f)\Delta t} - d}{u-d} \\ \text{선물 옵션:} & p = \dfrac{e^{(r-r)\Delta t} - d}{u-d} = \dfrac{1-d}{u-d} \end{cases}$$

- 예제
  - (1) 주가지수가 810, 변동성은 20%, 배당수익률은 연 2%, 무위험 이자율은 연 5%이다. 2기간 이항분포모형을 이용하면, 행사가격이 800인 6개월 유럽형 콜옵션은?
  - (2) USD/KRW 환율이 1,200, 환율의 변동성은 연 12%, 미국의 무위험이자율은 6% , 한국의 무위험이자율은 5%, 행사가격은 1,250인 3개월 만기의 미국형 콜옵션은?
  - (3)선물 가격이 30, 변동성은 20%, 무위험 이자율은 연 5%이다. 3기간 이항분포모형을 이용하면, 행사가격이 30인 9개월만기의 미국형 풋옵션 가격은?