Chapter 10
Hypothesis Test I

경영대학 재무금융학과
윤선중

Objectives

- 가설검정(Hypothesis)의 개념
- 모형균에 대한 가설검증에 적용
- 귀무가설과 대립가설을 설정하는 방법
- 기각역을 결정하는 방법
- 검정통계량의 값을 계산하는 방법
- 의사결정을 하는 방법 I: 검정통계량 이용
- 검정 결과 를해석하는 방법
- 의사결정을 하는 방법 II: p-값을이용
- 제2종오류의확률

Introduction

- 예제
  - 기존 암 치료요법의 완치율은 5%
  - 새로 개발된 신 치료요법이 더 우수한지를 검증하고자 함
  - 총 100명의 환자를 대상으로 실험한 결과, 7명이 완치되었음
  - 과연 신 치료요법이 기존의 치료요법보다 우수하다고 말할 수 있는가?
- 통계적 딜레마
  - 신 치료요법이 더 우수하다고 결론 내린 경우
    - 실제로는 기존 치료요법과 신 치료요법간에 차이가 없을 확률
  - 신 치료요법과 기존 치료요법에 차이가 없다고 결론 내린 경우
    - 실제로는 신 치료요법이 기존 치료요법보다 더 우수할 확률

Terminology

- 귀무가설 (Null Hypothesis)
  - 직접 검정 대상이 되는 가설
  - 대부분 기존에 알려져 있는 혹은 현재까지 주장되어 온 가설을 귀무가설로 설정하는 경우가 많음
  - H0: 신 치료요법과 기존 치료요법의 효능은 같다
- 대립가설 (Alternative Hypothesis)
  - 귀무가설이 기각될 때, 대안으로 받아들여지는 가설
  - 대부분 연구자(실험자)가 주장/증명하고자 하는 내용을 대립가설로 설정하는 경우가 많음
  - H1: 신 치료요법의 효능은 기존치료요법보다 더 우수하다
- 가설검정의 과정
  - 귀무가설이 옳다는 가정에서부터 출발
  - 귀무가설이 옳다는 가정을 기각할 만한 충분한 근거가 존재하는지를 표본으로부터 실험
  - 귀무가설을 기각하고 대립가설을 채택하거나, 혹은 귀무가설을 기각하지 못하는 것으로 양자 중 결론을 내림

Terminology

- 예제: 재판과정
  - H0: 피고는 ______
  - H1: 피고는 ______
  - 검찰: H0를 기각할 수 있는 근거를 제시
  - 변호인: H0를 기각하지 못하도록 피고를 변호
  - 항상 재판의 시작에서는 H0가 옳다는 가정 하에서 출발
  - 귀무가설 (무죄)를 채택(accept)한다고 말하지 않는다.
- 1종 오류 (type I error) vs. 2종 오류 (type II error)

의사결정\실제사실	귀무가설이 옳음	귀무가설이 틀림
귀무가설을 기각 못함		Type II Error β
귀무가설을 기각	Type I Error α	

Terminology

- 가설검정의 개념
  - H1을 지지할 수 있는 충분한 증거가 있다.
    - H0를 reject!
  - H1을 지지할 수 있는 충분한 증거가 없는가.
    - H0를 reject할 수 없다
    - 그러나 H0을 accept한다 할 수 없다.
- 두 가지 에러
  - A Type I error occurs when we reject a true null hypothesis
  - A Type II error occurs when we don't reject a false null hypothesis.
  - P(Type I error) $= \alpha$
  - P(Type II error) $= \beta$

Terminology

- 유의수준 (significance level)
  - 1종 오류를 허용할 확률: α 로 표기
  - "맞는 주장을 틀리다고 결론을 내릴 확률"
- 가설 검정력 (power)
  - 2종 오류를 허용하지 않을 확률: $1-\beta$ 로 표기
  - "틀린 주장을 틀리다고 결론 내릴 확률"
- 유의수준 vs. 가설 검정력
  - 유의수준과 가설 검정력은 trade-off의 관계에 있음
- 검정통계량 (test statistic)
  - 의사결정의 근거로 사용하기 위하여 표본으로부터 계산한 통계량
  - 앞의 예에서 신 치료요법의 표본 완치율, 검찰에서 제시한 증거 등

Procedures for Hypothesis Testing

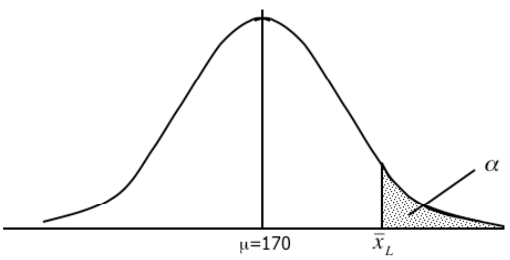
- (1) 귀무가설과 대립가설을 설정
  - 귀무가설:
  - 대립가설:
- (2) 귀무가설이 옳다는 가정 하에, 귀무가설이 그르다고 주장할 수 있는 충분한 증거가 존재하는지 관찰
  - 검정통계량 이용
- (3) 가설검정에 대한 결론
  - 귀무가설을 기각 vs. 귀무가설을 기각하지 못함
  - 주어진 오차허용한도인 '유의수준'에 근거하여 판단

Example

- 예제 10.1: 백화점의 새로운 청구 시스템
  - 백화점 경영자는 신용카드 고객을 위한 청구 시스템을 구축하는 것을 결정.
  - 평균이 170 달러 이상일 때만 효율적.
  - 400개의 임의표본이 추출되었고 평균은 178달러. 청구금액은 표준편차 65달러인 정규분포.
- Step 1: 가설검정
  - H1: $\mu > 170$
  - H0: $\mu = 170$
- Step 2: 검정통계량 산출
  - 총 400명을 대상으로 표본을 추출하여 조사한 결과,
  - 표본평균이 만약 178달러라고 하면,
  - 귀무가설을 기각? 귀무가설을 기각 못함?

Example (rejection region method)

- Step 3: 가설검정의 결론 (직접 계산에 유리)



$$P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\bar{x}_L-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{\bar{x}_L-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

$$\therefore \frac{\bar{x}_L-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha$$

- Z 값은 α 값에 의해 계산

Example (rejection region method)

- 만약 5%의 유의수준에서 검정한다면,

$$\frac{\bar{x}_L - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \quad \& \quad z_\alpha = z_{.05} = 1.645$$

$$gives: \frac{\bar{x}_L - 170}{65/\sqrt{400}} = 1.645 \qquad \bar{x}_L = 175.34$$

- 앞 예제에서, 표본평균이 178이므로 임계치를 초과
- 따라서 5% 유의수준에서 귀무가설을 ________
- 임계치란 귀무가설을 기각 vs. 기각 못함으로 구분하는 검정통계량의 기준
- 기각역 (rejection region): 귀무가설을 기각하는 검정통계량의 영역
- 위 예에서 기각역은 {표본평균 > 175.35}

Example (p-value approach)

- Step 3: 가설검정의 결론 (컴퓨터 사용)
  - 유의수준 5%의 의미: 귀무가설이 옳음에도 불구하고, 이를 기각하게 될 확률
    - 본 가설검정에서는 이와 같은 오류 확률이 5%까지는 허용
  - 귀무가설이 옳다면,

$$\bar{X} \sim N(170, 65^2/400)$$

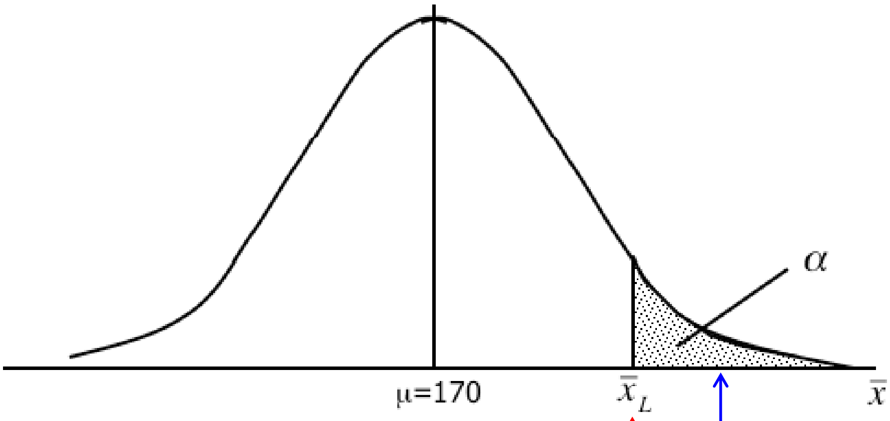
  - 178달러라는 표보평균에 근거하여 귀무가설을 기각하였을 때, 잘못된 오류를 저지를 확률은

$$P(\bar{X} > 178) = P\left(\frac{\bar{X} - 170}{65/\sqrt{400}} > \frac{178 - 170}{65/\sqrt{400}}\right) = P(Z > 2.4615) = 0.0069$$

  - 0.0069는 5% 허용범위보다 작으므로 귀무가설을 ______!

** p-value: 귀무가설을 기각하였을 때, 오류를 범할 확률!!

Example



~~$H_0: \mu = 170$~~

$H_1: \mu > 170$

$\bar{x}_L = 175.34$

$\bar{x} = 178$

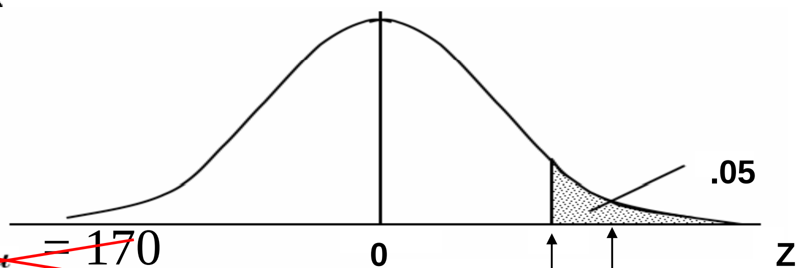
Reject H_0 in favor of

More Easier Method

- 표준화 테스트 통계량

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{178 - 170}{65 / \sqrt{400}}$$



~~$H_0: \mu = 170$~~

$H_1: \mu > 170$

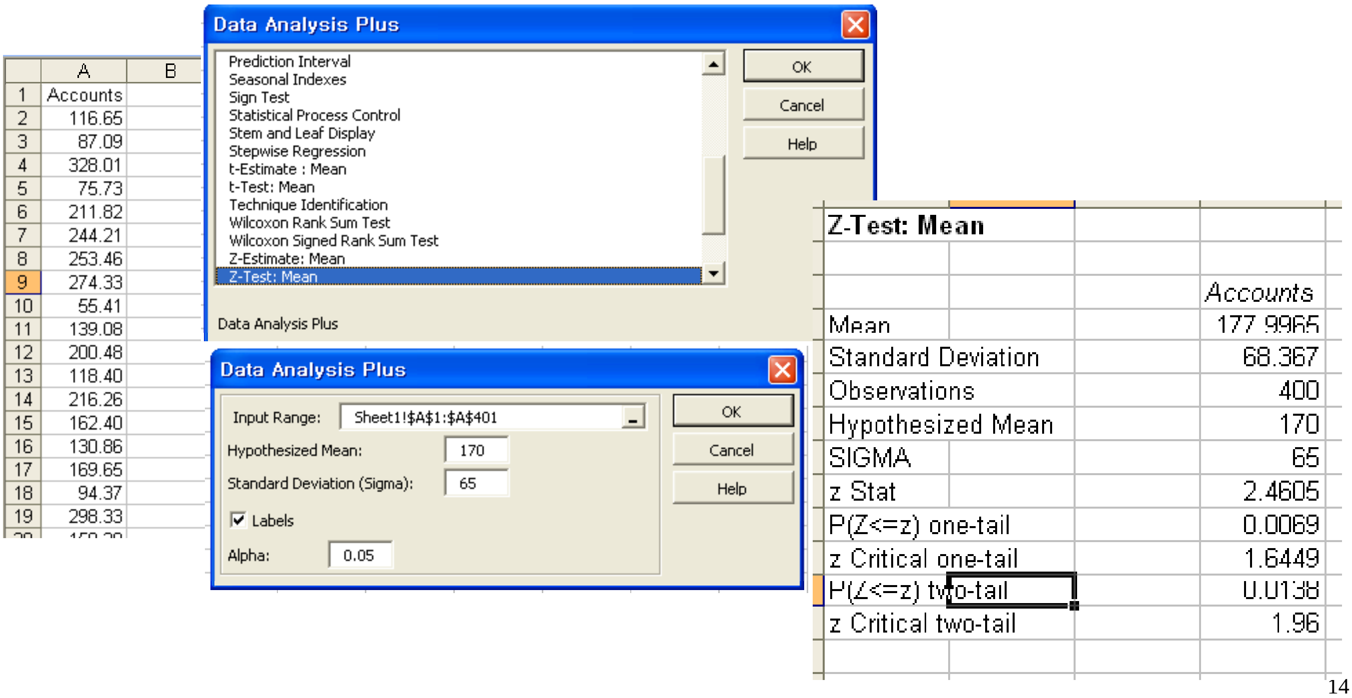
Reject H_0 in favor of

$Z_{.05} = 1.645$

$z = 2.46$

Exercise using Excel

- Xm 10-01: Data Analysis Plus- Z-test-Mean



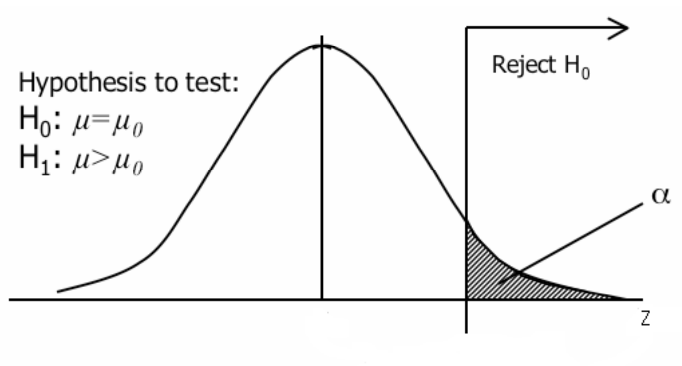
Exercise 1

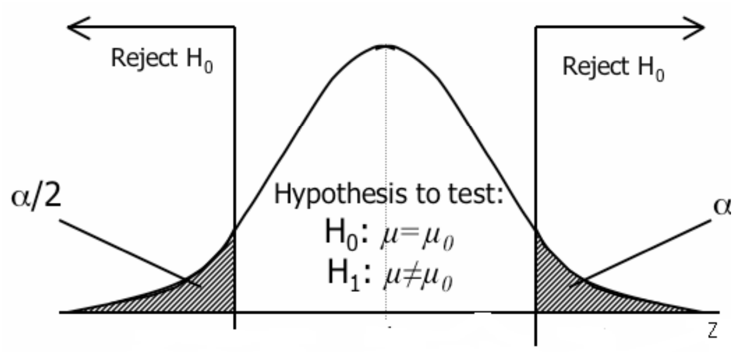
- 개요 (Xr 10-29: 연습문제 10-29)
  - 18명의 젊은 성인으로 구성된 임의 표본추출
  - 일평균 스포츠 시청시간을 조사: 엑셀 참조
  - 모 표준편차가 10분이라고 알려져 있을 때,
  - 젊은 성인들은 하루 평균 50분 이상 스포츠를 시청한다고 추론할 수 있는지 검정하시오 (단, 유의수준은 5%)

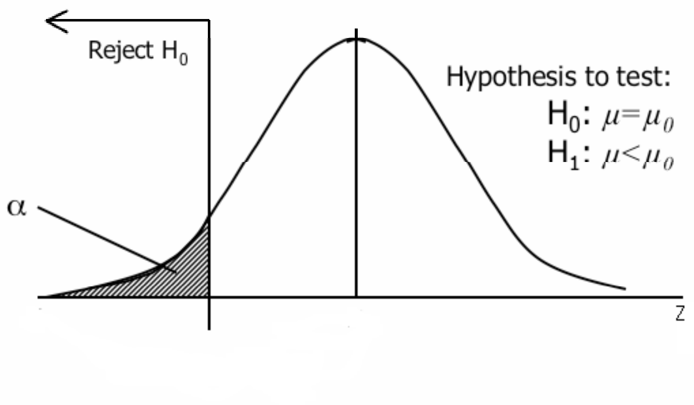
One Tail & Two Tail Test

- 단측검정 vs. 양측검정
  - 단측검정: 대립가설이 부등식 형태
  - 양측검정: 대립가설이 '같지 않다'의 형태
  - 양측검정의 p-value = 단측검정의 방법으로 계산한 p-value * _____

Exercise 2







Exercise

- 개요 (Xm 10-2: 예제 10-2)
  - AT&T 고객들의 월간 장거리 전화비용의 평균과 표준편차는 각각 17.09달러와 3.87달러
  - 임의 추출된 100명의 경쟁기업 고객들의 장거리 전화비용: 엑셀 참조
  - AT&T와 경쟁기업 고객들의 월간 장거리 전화비용이 동일한지를 검정하시오 (단, 유의수준은 5%)

Exercise 3

- 개요 (Xr 10-40: 연습문제 10-40)
  - 한 고속도로 순찰원은 고속도로를 달리는 자동차의 평균속도는 시속 55마일을 초과한다고 믿음
  - 임의표본으로 추출된 200대 자동차의 속도를 기록: 엑셀 참조
  - 고속도로에서의 자동차 속도의 표준편차는 시속 5마일로 알려져 있음
  - 위 고속도로 순찰원의 믿음을 1% 유의수준에서 검정하시오

Exercise 4

- 개요 (Xm 11-1: 예제 11-1)
  - 경험이 많은 근로자는 시간 당 500개의 소포를 발송
  - 신입 근로자가 한 시간 당 처리하는 소포의 수: 엑셀 참조
  - 신입 근로자의 생산성이 숙련 근로자의 생산성의 90% 이상일 것이라는 관리자의 믿음을 검정하시오 (단, 유의수준은 5%)
  - 단, 발송되는 소포 수에 대한 모 표준편차는 알려져 있지 않음!

Exercise 5

- 개요 (Xr 11-22: 연습문제 11-22)
  - 퀴즈쇼에 출연한 출연진 중 승자들의 상금: 엑셀 참조
  - 이 쇼의 모든 승자들이 받는 금액은 20,000 달러보다 더 많은지를 5% 유의수준에서 검정하시오
  - 단, 승자들의 상금에 대한 모 표준편차는 알려져 있지 않음!

Known S.D. vs. Unknown S.D.

- 모 표준편차가 알려져 있는 경우
  - **Step 3: 검정통계량 (i.e. 표본평균)이 정규분포를 따른다는 가정 하에 검정**
  - **표본평균이 a, 유의수준이 α 라고 하면,**

$$\begin{cases} p-value = P(\bar{X} > a) = P\left(Z > \dfrac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 1-normdist\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}, 0, 1, true\right) \\ \text{기각역: } P(\bar{X} > X_L) = \alpha \Rightarrow \dfrac{X_L-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \Rightarrow X_L = \mu + z_\alpha \times \sigma/\sqrt{n} \end{cases}$$

- 모 표준편차가 알려져 있지 않은 경우
  - **Step 3: 검정통계량이 student-t 분포 (자유도 n-1)를 따른다는 가정 하에 검정**

$$\begin{cases} p-value = P(\bar{X} > a) = P\left(t > \dfrac{a-\mu}{s/\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 1-tdist\left(\dfrac{a-\mu}{s/\sqrt{n}}, n-1, true\right) \\ \text{기각역: } P(\bar{X} > X_L) = \alpha \Rightarrow \dfrac{X_L-\mu}{s/\sqrt{n}} = t_\alpha^{(n-1)} \Rightarrow X_L = \mu + t_\alpha^{(n-1)} \times s/\sqrt{n} \end{cases}$$