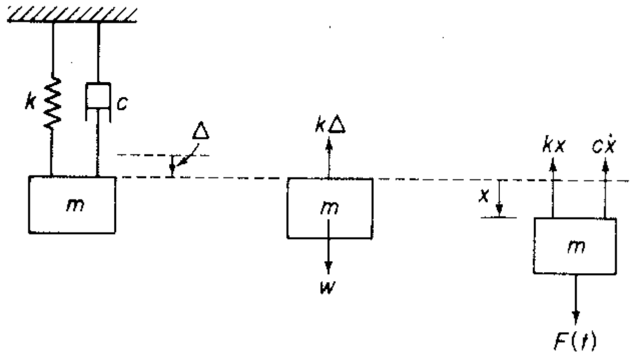
# 제 3장 조화 가진 운동

## 3-1. 서론



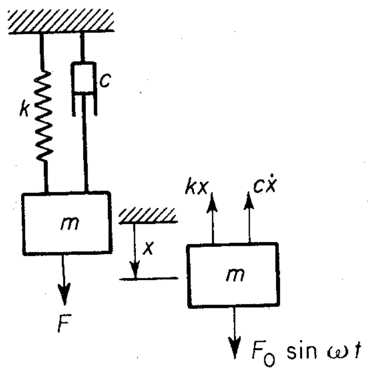

## 3-2. 운동 방정식

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

일반해 $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

제차해 $x_h(t)$ 는 자유진동 운동방정식 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$의 해이고
특별해 $x_p(t)$ 는 정상상태 진동을 나타낸다.

## 3-3. 조화력을 받는 비감쇠계의 진동



$$m\ddot{x} + kx = F_o \cos\omega t \tag{1}$$

1) 제차해

$$x_h(t) = C_1 \cos\omega_n t + C_2 \sin\omega_n t \qquad \left( \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

2) 특별해

$x_p(t) = X\cos\omega t$ 로 가정하면

$(-m\omega^2 + k)X\cos\omega t = F_o \cos\omega t$ 이므로 $\quad X = \dfrac{F_o}{k - m\omega^2}$

3) 일반해

$$x(t) = C_1 \cos\omega_n t + C_2 \sin\omega_n t + \frac{F_o}{k - m\omega^2} cos\omega t$$

초기조건 $x(0) = x_o$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_o$을 대입하면

$$C_1 = x_o - \frac{F_o}{k - m\omega^2} \qquad\qquad C_2 = \frac{\dot{x}_o}{\omega_n}$$

$$x(t) = (x_o - \frac{F_o}{k - m\omega^2})\cos\omega_n t + \left( \frac{\dot{x}_o}{\omega_n} \right)\sin\omega_n t + \frac{F_o}{k - m\omega^2} cos\omega t$$

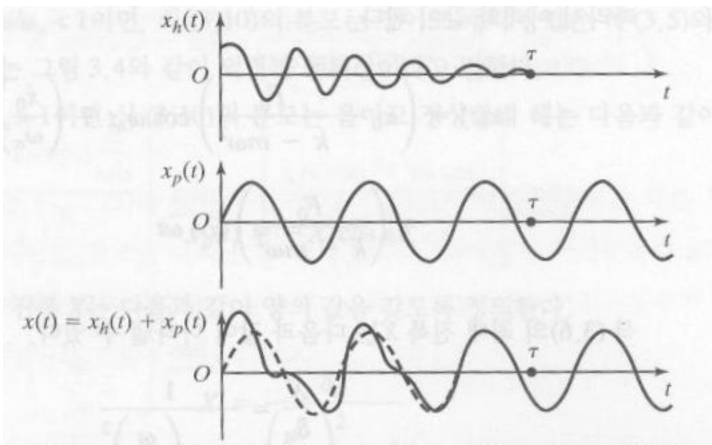



**그림 3.2** 부족감쇠의 경우 방정식 (3.1)의 제차해, 특별해, 일반해

$F_o = k\delta_{st}, \quad \Rightarrow \delta_{st} = \dfrac{F_o}{k}$ (정적 처짐)

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

: 확대율 (magnification factor) 또는 증폭율 (amplitude ratio)

경우 1) $0 < \dfrac{\omega}{\omega_n} < 1$

$x_p$ 와 $F(t)$ 는 동 위상

경우 2) $\omega/\omega_n > 1$

$$x_p(t) = -X\cos\omega t \qquad\qquad X = \frac{\delta_{st}}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1}$$

$$= X\cos(\omega t - \pi)$$

$x_p$ 와 $F(t)$ 는 $180^o$ 위상차를 갖는다.

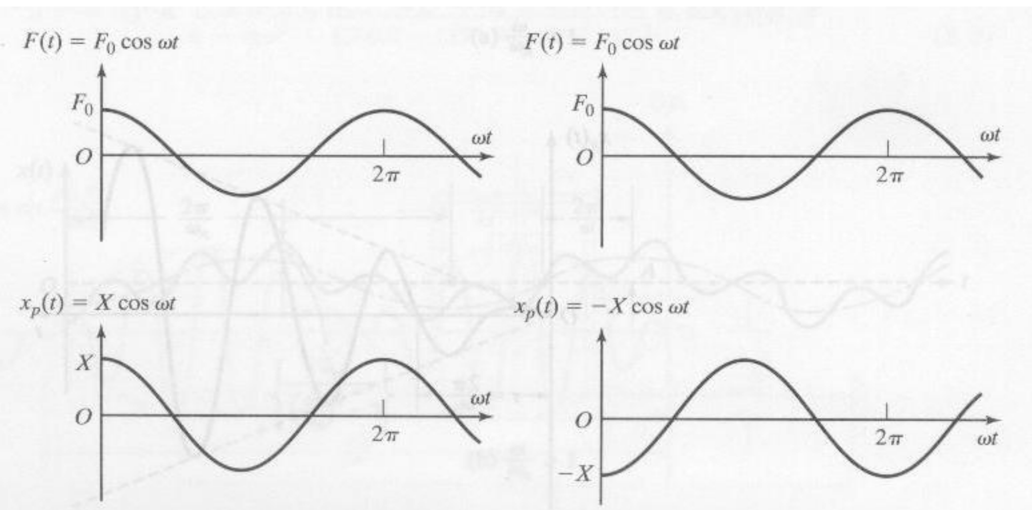
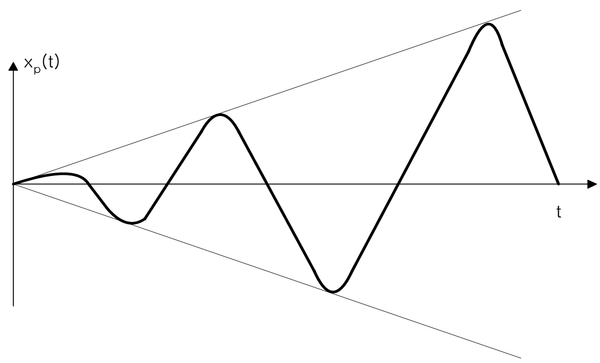



그림 3.4 $0<\omega/\omega_n<1$일 때의 조화응답 그림 3.5 $\omega/\omega_n>1$일 때의 조화응답

경우 3) $\dfrac{\omega}{\omega_n}=1$

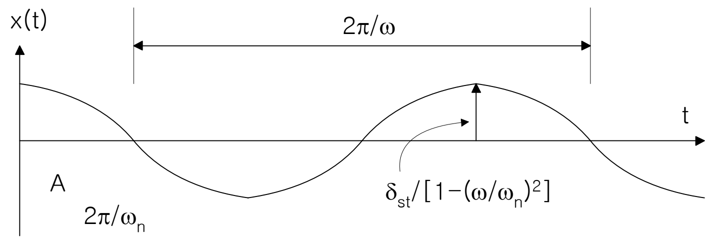
$$X=\frac{\delta_{st}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \;\rightarrow\; \infty \qquad \Leftarrow \quad \text{공진(resonance) 현상.}$$



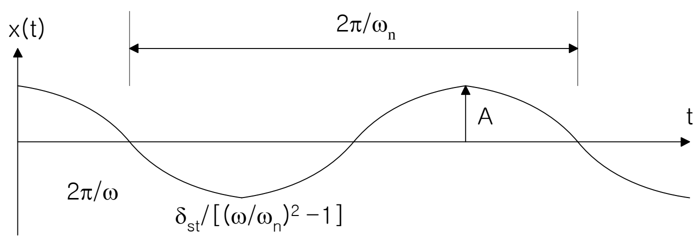

4. 전체 응답

$$x(t)=A\cos(\omega_n t-\phi)\;+\frac{\delta_{st}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}cos\omega t \qquad \text{for} \quad \omega/\omega_n<\;1$$

$$x(t)=A\cos(\omega_n t-\phi)-\frac{\delta_{st}}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2-1}cos\omega t \qquad \text{for} \quad \omega/\omega_n>\;1$$




( $\omega/\omega_n<1$ )




( $\omega/\omega_n>1$ )

5. 맥놀이(beating) 현상

간단한 수식전개를 위해 $x_o = \dot{x}_o = 0$ 으로 가정하면,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_o}{k - m\omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_n t) \\ &= \frac{F_o/m}{\omega_n^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_n t) \\ &= \frac{F_o}{k - m\omega^2}\left[2\sin\left(\frac{\omega + \omega_n}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2}t\right)\right] \end{aligned}$$

$\omega_n - \omega = 2\epsilon$ ($\epsilon$ : 작은 양수)이라면 $\omega_n + \omega = 2\omega + 2\epsilon = 2(\omega + \epsilon) \simeq 2\omega$ 과 $\omega_n^2 - \omega^2 = (\omega_n + \omega)\ (\omega_n - \omega) = 4\epsilon\omega$ 이 성립하므로

$$x(t) = \left(\frac{F_o/m}{2\epsilon\omega} sin\epsilon t\right)\sin\omega t$$

진폭 : $\frac{F_o/m}{2\epsilon\omega} sin\epsilon t$

주기 : $\omega/2\pi$

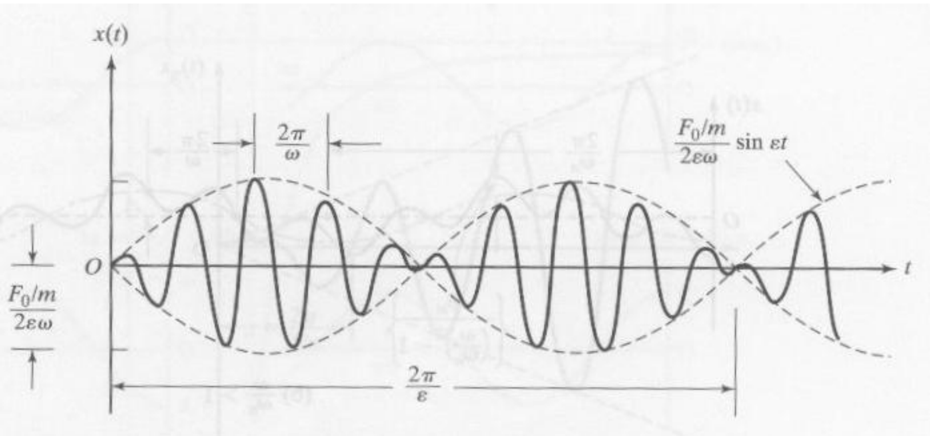



그림 3.8 맥놀이 현상

맥놀이 주기 $\tau_b = \frac{2\pi}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega}$

### 3.4 조화력을 받는 감쇠계의 응답

가진함수가 $F(t) = F_o \cos\omega t$로 주어지면 운동방정식은

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \cos\omega t \tag{2}$$

$x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ 또는 $x_p = X\cos(\omega t - \phi)$를 가정하여 식 (2)를 풀면

$$A = F_o \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

$$B = F_o \frac{\omega c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

$$\begin{aligned} x_p &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ &= X\cos(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ &= \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \\ &= \frac{F_o/k}{\sqrt{(1 - \frac{m}{k}\omega^2)^2 + \frac{c^2}{k^2}\omega^2}} \end{aligned}$$

$\frac{F_o}{k} = \delta_{st}$과 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 및 $\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$을 도입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{X}{\delta_{st}} &= \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \left( r = \frac{\omega}{\omega_n} \right) \end{aligned}$$

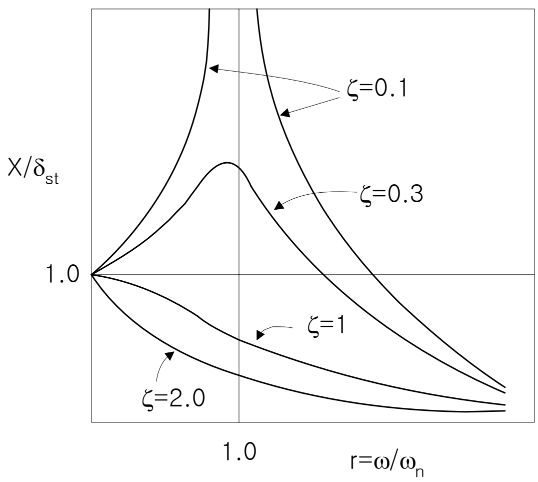
한편 $\tan\phi = \frac{B}{A}$ 이므로 위상각은

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

a) $\zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0$ (위상차 없다.)

b) 감쇠는 진폭비를 감소시킨다.



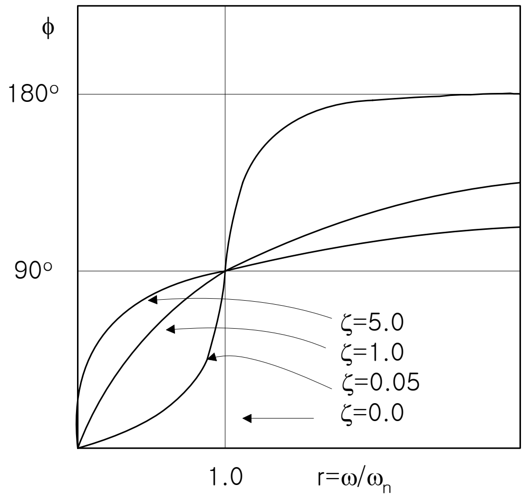

c) 진폭비의 감쇠는 공진 또는 부근에서 현저하게 나타남.

d) 최대 진폭비는 $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2}$ 에서 발생

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

e) $r = 1$ $(\omega = \omega_n)$ , $\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta}$

f) $\zeta >$ $1/\sqrt{2}$ 이면, 극대점 없고, $\zeta = 0$ 이면, $r = 1$에서 불연속.




g) 위상각은 $m,\ c,\ k,\ \omega$ 의 함수이며, $F_o$에는 무관.

h) $r \ll 1$ 이면 동일 위상이고, $r \gg 1$ 이면 $180^o$ 위상차.
공진에서의 위상각은 $90^o$.

i) $\omega <\ \omega_n$ 에서는 감쇠가 증가하면 위상각 증가.
$\omega >\ \omega_n$ 에서는 감쇠가 증가하면 위상각 감소.

## 1. 전체 응답

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

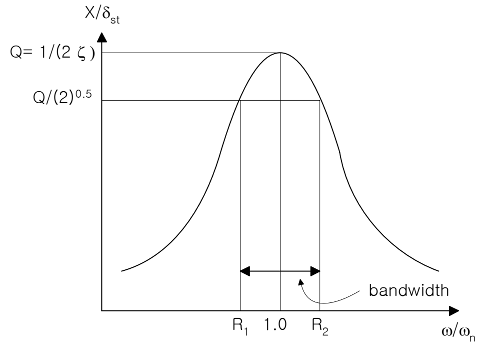
$$x(t) = X_o e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_o) + X\cos(\omega t - \phi) \qquad (\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n)$$

## 2 양호도와 대역폭

감쇠가 작은경우 ($\zeta <\ 0.05$ ),

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} \simeq \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} = Q$$

$Q$ : $Q$-factor 또는 양호도(quaility factor)




증폭률이 $\dfrac{Q}{\sqrt{2}}$로 떨어지는 점을 $R_1$, $R_2$을 반동력점(half power points) 이라고 하는데 이는 조화운동을 하는 감쇠기의 동력은 $\Delta W = \pi c \omega X^2$이기 때문이다. 반동력점에 해당하는 진동수 $\omega_1$과 $\omega_2$를 구하기위하여

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\zeta}$$

를 풀면

$$r^4 - r^2(2-4\zeta^2) + (1-8\zeta^2) = 0$$

$$r^2 = \frac{(2-4\zeta^2) \pm \sqrt{(2-4\zeta^2)^2 - 4(1-8\zeta^2)}}{2}$$

$$r_1^2 = 1-2\zeta^2 - 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$$
$$r_2^2 = 1-2\zeta^2 + 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$$

ζ 가 작으면,

$$r_1^2 = R_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \simeq 1-2\zeta$$

$$r_2^2 = R_2^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 \simeq 1+2\zeta$$

$$\begin{aligned}\omega_2^2 - \omega_1^2 &= (\omega_2+\omega_1)(\omega_2-\omega_1) \\ &= \left(R_2^2 - R_1^2\right)\omega_n^2 \simeq 4\zeta\omega_n^2\end{aligned}$$

그런데, $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}=\omega_n$를 사용하면 대역폭 $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$

$$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1\simeq 2\zeta\omega_n$$

$$Q\simeq\frac{1}{2\zeta}\simeq\frac{\omega_n}{\omega_2-\omega_1}$$

양호도 $Q$는 등가 점성감쇠를 추산하는데 사용된다.

## 3-5. 복소 주파수 응답

조화 가진함수를 $F_0e^{i\omega t}$로 나타내면 특별해는 $x_p=Xe^{i\omega t}$로 가정하여 운동방정식 (2)를 푼다. 중요한 점은 $F_0$와 $X$가 복소수이다.

- 정상상태 해

$$X=\frac{F_0}{(k-\omega^2m)+ic\omega}$$

$$=\frac{F_0}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+i\,2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

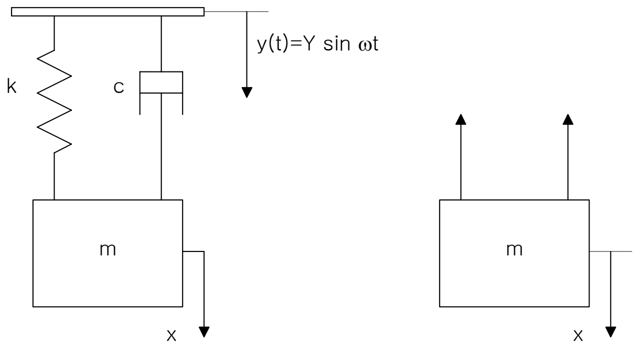
- 복소 주파수응답

$$H(i\omega)=\frac{X}{\frac{F_0}{k}}=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+i\,2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$H(i\omega)=\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}-i\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

$$=|H(i\omega)|e^{-i\phi}$$

## 3.6 기초의 조화운동으로 인한 감쇠계의 응답




운동 방정식을 유도하면

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky \qquad (3)$$

$y(t) = Y\sin\omega t$ 이므로 식 (3)은

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\omega Y\cos\omega t + kY\sin\omega t \qquad (4)$$

식 (4)의 특별해

$$x_p(t) = Y\sqrt{\frac{k^2+(c\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\, sin(\omega t - \phi_1 - \alpha)$$

$$= X\sin(\omega t - \phi_1 - \alpha)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{c\omega}{k}\right) = \tan^{-1}(-2\zeta r)$$

- 변위 전달율 (Transmissibility)

$$\frac{X}{Y}=\sqrt{\frac{k^2+(c\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \quad =\sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

1. 전달력 (Transmitted Force)

$$F=k(x-y)+c(\dot{x}-\dot{y})=-m\ddot{x}$$

$$\begin{aligned} F&=-m\ddot{x}=m\omega^2 X\sin(\omega t-\phi_1-\alpha) \\ &=F_T\sin(\omega t-\phi_1-\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{F_T}{kY}=r^2\sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \qquad \text{: 힘전달율}$$

2. 상대 운동

$$m\ddot{x}=-k(x-y)-c(\dot{x}-\dot{y})$$

$$m\ddot{x}+c(\dot{x}-\dot{y})+k(x-y)=0$$

기초 가진에 대한 질량의 상대운동 $z=x-y$ 을 도입하면 운동방정식 (3)은

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=-m\ddot{y} \tag{5}$$

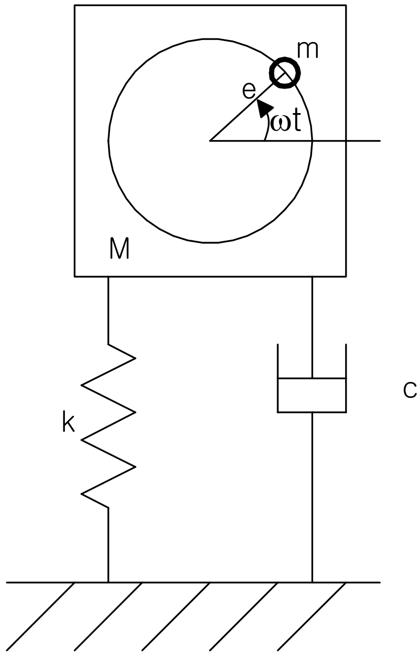
식 (5)의 특별해는

$$\begin{aligned} z(t)&=\frac{m\omega^2 Y\sin(\omega t-\phi_1)}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}} \\ &=Z\sin(\omega t-\phi_1) \end{aligned}$$

$$Z=Y\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$\phi_1=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

### 3.7 회전 불평형으로 인한 감쇠계의 응답




편심되어 회전하는 질량의 수직성분만 고려한다면 운동방정식은

$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

특별해는

$$x_p=\frac{me\omega^2}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+(c\omega)^2}}sin(\omega t-\phi)$$

$$=\frac{mer^2/M}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}sin(\omega t-\phi)$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)\ ,$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{M}}\ ,\quad c_c=2M\omega_n,\ \zeta=\frac{c}{c_c},\ r=\frac{\omega}{\omega_n}$$

## 3-8. 쿨롱 감쇠를 갖는 강제진동

운동 방정식

$$m\ddot{x} \pm \mu N + kx = F(t) = F_0 \sin\omega t$$

을 등가 점성감쇠계수 $c_{eq}$를 도입하여

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = F(t) = F_0 \sin\omega t$$

를 풀면된다 등가 점성감쇠계수는 1 사이클동안 건마찰 감쇠에 의한 소산에너지를 이용하여 계산한다.

$$\Delta W = 4\mu NX = \pi c_{eq} \omega X^2$$

그러므로,

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X}$$

## 3-9. 이력 감쇠를 갖는 강제진동

운동방정식

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

대신에

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

를 푼다 이때,

$$c_{eq} = \frac{\beta k}{\omega}$$

## 3-10. 자려와 안정성 해석

- 자려 진동계

  가진력이 계의 운동의 함수인 계로 운동 자체로 가진력이 발생

  회전축 문제, 터빈블레이드의 진동

- 안정성 판별

  $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$의 해를 $x=Ce^{st}$로 가정하여 구하면

$$s_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{(\frac{c}{m})^2-4\frac{k}{m}}$$

  에서 실수부가 음값이면 안정