3장 고계 미분방정식

Week10

hylee@silla.ac.kr

3.3 선형 미분방정식

3.3 제차 선형상미분방정식 (Homogeneous Linear ODEs)

- n계 상미분방정식 : $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$
- n계 선형상미분방정식 : $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$
- 표준형(Standard Form) : $y^{(n)}$을 첫 번째 항으로 갖는 식
  - 제차(Homogeneous) : $r(x) = 0$
  - 비제차(Nonhomogeneous) : $r(x) \neq 0$

고계선형 미분방정식

고계선형 미분방정식

$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = f(t)$ ---- (1)

위의 식은 2계선형상미분방정식(second- order linear ordinary differential equation)의 전형적인 표현식이다.

우변이 0인 경우를 homogeneous(동차 또는 제차), $f(t)$인 경우를

homogeneous(비동차 또는 비제차)라고

구분하며 특히 계수인 a(t), b(t)가 상수인 경우를 상수계수 2계 선형 미분방정식이라고 한다.

(It is very easy and makes us comfortable!!)

homogeneous한 2계상미분방정식은 선형독립인(linearly independent) 2개의 해 $y_1(t)$, $y_2(t)$를 가지며, 최종 해는 이들의 1차

결합으로 구성된다.

즉 $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ ---- (2)

3.2 상수계수를 갖는 제차 선형상미분방정식 (Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients)

- 상수계수를 갖는 n계 제차 선형상미분방정식 : $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$
- 특성방정식 : $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

● 일반해

특성방정식 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$이

- 서로 다른 실근

$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$이 서로 다른 것이면, 이에 대응하는 m 개의 일차독립인 해 : $y_1 = e^{\lambda_1 x},\ \cdots,\ y_n = e^{\lambda_n x}$

- 단순 복소근

공액쌍($\lambda = \gamma \pm i\omega$)으로 나타남.

이에 대응하는 두 개의 일차독립인 해 : $y_1 = e^{\gamma x}\cos\omega x,\ y_2 = e^{\gamma x}\sin\omega x$

- 다중 실근을 가질 때,

λ가 m차 실근이면, 이에 대응하는 m 개의 일차독립인 해 : $e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x}, \cdots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}$

- 다중 복소근

$\lambda = \gamma \pm i\omega$ 이 복소이중근이면,

이에 대응하는 일차독립인 해 : $e^{\gamma x}\cos\omega x,\ e^{\gamma x}\sin\omega x,\ xe^{\gamma x}\cos\omega x,\ xe^{\gamma x}\sin\omega x$