제2장) 1계 미분방정식

hylee@silla.ac.kr

2.1 변수분리형 미분방정식

2.1 변수분리형 미분방정식

- 변수분리형 방정식(Separable Equation)

  : 미분방정식의 왼쪽은 y, 오른쪽은 x만으로 구성되도록 조작 가능

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad g(y)dy = f(x)dx \quad \left(\because y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

- 변수분리법(Method of Separating Variable)

  : 미분방정식의 양변을 x로 적분하면 변수분리한 식의 왼쪽은 y, 오른쪽은 x로

  적분한 결과가 나옴

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c \quad \left(\because \frac{dy}{dx}dx = dy\right)$$

❖ 변수분리를 할 경우 양변을 적분하여 쉽게 해를 구할 수 있음.

■ Ex. 1 미분방정식 $y'=1+y^2$을 풀어라.

$$\frac{y'}{1+y^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy/dx}{1+y^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1+y^2}=dx$$ (변수분리형)

$$\Rightarrow \quad \int\frac{1}{1+y^2}dy=\int dx+c \quad \Rightarrow \quad \arctan y = x+c$$ (적분)

$$\Rightarrow \quad y=\tan(x+c)$$ (정리)

■ Ex. 2

미분방정식 $(1+x)dy - ydx = 0$ 의 해를 구하여라.

주어진 미분방정식의 양변을 $(1+x)y$ 로 나누면

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy - \frac{1}{1+x}dx = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x}dx$$ (변수분리형)

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{1+x}dx + c$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|1+x| + c_1 \quad (c_1\text{은 임의의 양수})$$ (적분)

$$\Rightarrow \quad y = e^{\ln|1+x|+c_1} = \pm e^{c_1}(1+x).$$ (정리)

■ Ex. 3 $2xyy' = y^2 - x^2$ 을 풀어라.

$$2xyy' = y^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$$ (**2xy로 나눔**)

$$\Rightarrow \quad y = ux, \quad u = \frac{y}{x}, \quad y' = u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

$$u'x = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = -\frac{u^2+1}{2u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}\frac{2u}{u^2+1} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{2u}{u^2+1}du = -\frac{1}{x}dx$$ (**변수분리형**)

$$\int \frac{2u}{u^2+1}du = -\int \frac{1}{x}dx + c^* \quad \Rightarrow \quad \ln\left|u^2+1\right| = -\ln|x| + c^* = \ln\frac{1}{|x|} + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|, \quad c = e^{c^*}$$ (**적분**)

$$u^2 + 1 = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = cx$$

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$$ (**정리**)