제13장 통계적 가설검정 (이론)

* 통계적 가설검정

가설검정(hypothesis test): 추출된 표본에서 얻어지는 정보를 이용하여 모수에 대한 상호 상반되는 2개의 주장 중 1개를 선택하는 절차

(1) 필요한 용어

① 통계적 가설: 모수에 대한 2가지 주장

- 대립가설(alternative hypothesis; H_1): 입증하여 주장하고자 하는 가설,

"모수값이 변했다", "두 모수값이 차이가 있다" 等의 내용이 설정됨.

- 귀무가설(null hypothesis; H_0): H_1을 입증할 수 없을 때 H_1을 무효화 시키면서 받아들이는 가설, 대립가설의 여집합,

"모수값이 前과 같다", "두 모수값에 차이가 없다" 等의 내용이 설정됨.

② 검정통계량(test statistics): 2개의 가설 중 어떤 가설을 채택할 것인가를 결정하는데 이용될 표본의 함수, 미지의 모수를 포함해서는 안됨.

③ 기각역(critical region): H_0를 기각하게 될 검정통계량 값의 범위 $\Leftrightarrow$ 채택역

④ 임계치(critical value): 기각역과 채택역의 경계.

⑤ 제 1 종의 오류(Type I error): H_0가 사실인데도 H_0를 기각하게 되는 오류,

제 2 종의 오류(Type II error): H_1이 사실인데도 H_1을 기각하게 되는 오류.

⑥ 유의수준(significance level) = P(제 1 종의 오류) = α,

실효확률 = P(제 2 종의 오류) = β.

⑦ 검정력(power) $= P(\text{ reject } H_0 \mid H_1 \text{ is true }) = 1 - \beta$.

		True Status	
		H_0 is true	H_1 is true
Decision	Do not reject H_0	Correct Decision	Type II error
	Reject H_0	Type I error	Correct Decision

(2) 가설검정을 위한 6단계 절차

① 가설(H_0, H_1)의 설정

: 조사자가 증명하고자 하는 것을 H_1으로 설정하고, 이에 반대되는 것을 H_0로 설정

② 검정통계량과 검정통계량 분포의 결정

: μ에 대한 가설검정이면 $\overline{X}$를 출발점으로,

σ^2에 대한 가설검정이면 s^2을 출발점으로.

③ 유의수준의 결정 ⇒ 기각역의 결정

- α와 β를 동시에 최소화 시켜주는 검정방법을 찾고자 함 ⇒ impossible, since $\alpha\downarrow$ implies $\beta\uparrow$.

- 차선책으로, α를 어떤 작은 값(=0.01, 0.05, 0.10)으로 고정시키고 그 고정된 α 下에서 β를 최소화 시켜주는 검정방법을 찾아내려 함

- α와 검정통계량의 결정 ⇒ 기각역이 자동적으로 결정됨.

④ Statement of decision rule

[예] If $\overline{X} > 1.50$, do not reject H_0,

If $\overline{X} \le 1.50$, reject H_0.

⑤ 자료의 수집

⑥ 결론

[예제] A 공장에서 생산되는 페인트가 마르는데 걸리는 시간 = $X \sim$ 정규$(75, 81)$.

마르는데 걸리는 시간을 줄이기 위해 새로운 첨가제 개발(단, 새로운 첨가제를 기존 제품에 첨가해도 X의 분포 형태와 분산은 불변이라 가정). 첨가제의 효과를 검증하기 위해 새로운 제품에서 $n = 25$개의 표본추출 $\Rightarrow$ $X_1, X_2, \cdots, X_{25} \sim$ 정규$(\mu, 81)$.

① $H_0 : \mu = 75 \quad vs. \quad H_1 : \mu < 75$

② $\overline{X} \sim$ 정규$(\mu, \frac{81}{25}) \Rightarrow z^* = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{81/25}} \sim$ 정규$(0, 1)$ 임을 이용하여 검정통계량 구성

③ & ④ Set $\alpha = 5\%$. Reasonable rejection region is, "Reject H_0 if $\overline{X} \le c$"

$\Rightarrow$ Should determine c using given $\alpha = 5\%$. That is,

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0.05 \\
&= P(H_1 \mid H_0) \\
&= P(\overline{X} < c \mid \mu = 75) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - 75}{\sqrt{81/25}} < \frac{c - 75}{\sqrt{81/25}} \mid \mu = 75\right) \\
&= P\left(z_0^* < \frac{c - 75}{1.80}\right), \text{ where } z_0^* = \frac{\overline{X} - 75}{\sqrt{81/25}} \sim \text{정규}(0, 1), \text{ when } H_0 \text{ is true.}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \frac{c-75}{1.80} = -1.645$, from standard normal table.

$\Rightarrow \quad c = 72.039$.

Therefore, reasonable rejection region is $\overline{X} \le 72.039$.

⑤ $\overline{X} = 70.$

⑥ $\overline{X} = 70 < 72.039$ 이므로, reject H_0.

또는,

$$
\begin{aligned}
0.05 &= P(\overline{X} < c \mid \mu = 75) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}-75}{\sqrt{81/25}} < \frac{c-75}{\sqrt{81/25}} \mid \mu = 75\right) \\
&= P(z_0^* < -1.645),
\end{aligned}
$$

이므로 기각역을 $z_0^* = \frac{\overline{X}-75}{\sqrt{81/25}} < -1.645$ 으로도 설정할 수 있다.

[예제] (continued)

신입 사원이 성분을 알 수 없는 화학 물질을 생산된 페인트에 첨가(단, 이 때에도 X의 분포 형태와 분산은 불변이라 가정). 그 화학 물질을 첨가하였어도 페인트의 품질에 변화가 생기지 않았는지 검증하기 위해 생산된 제품에서 $n = 100$개의 표본추출

$\Rightarrow \quad X_1, X_2, \cdots, X_{100} \sim$ 정규$(\mu, 81)$.

① $H_0: \mu = 75 \quad vs. \quad H_1: \mu \neq 75$

② $\overline{X} \sim$ 정규$(\mu, \frac{81}{100}) \Rightarrow z^* = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{81/100}} \sim$ 정규$(0, 1)$ 임을 이용하여 검정통계량 구성

③ & ④ Set $\alpha = 5\%$. Reasonable rejection region is, "Reject H_0 if $\overline{X} \leq c_1$ or $\overline{X} \geq c_2$"

$\Rightarrow$ Should determine c_1 & c_2 using given $\alpha = 5\%$. That is,

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.05 \\ &= P(H_1 \mid H_0) \\ &= P(\overline{X} < c_1 \text{ or } \overline{X} > c_2 \mid \mu = 75) \end{aligned}$$

그러나 윗 식으로부터 c_1과 c_2의 유일해를 구할 수 없다.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha/2 &= 0.025 \\ &= P(\overline{X} < c_1 \mid \mu = 75), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha/2 &= 0.025 \\ &= P(\overline{X} > c_2 \mid \mu = 75). \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \frac{c_1 - 75}{0.90} = -1.960 \quad \& \quad \frac{c_2 - 75}{0.90} = 1.960$, from 정규(0, 1) table.

$\Rightarrow \quad c_1 = 73.236, \quad c_2 = 76.764.$.

Therefore, reasonable rejection region is $\overline{X} \leq 73.236$ 또는 $\overline{X} \geq 76.764$.

또는, 전번 [예제]에서와 동일한 방법을 이용하여 기각역을

$z_0^* = \dfrac{\overline{X} - 75}{\sqrt{81/100}} < -1.960$ 또는 $z_0^* = \dfrac{\overline{X} - 75}{\sqrt{81/100}} > 1.960$ 으로 설정할 수도 있다.

(3) 유의확률(significance probability, p-value)

[정의] 유의확률

① P(obtaining a test statistic value which is as extreme or more extreme than the observed value of test statistic | H_0 is true),

② The smallest α value at which H_0 can be rejected.

[예] (원래 강의 note의 그림 삽입)

p-value = $P(Z < z^*)$ in case of $H_1: \mu < \mu_0$,

= $P(Z > z^*)$ in case of $H_1: \mu > \mu_0$,

$= P(|Z| > |z^*|)$ in case of $H_1: \mu \neq \mu_0$.

<Note>:

(a) If p-value $\leq \alpha$ $\Rightarrow$ reject H_0 at significance level α,

If p-value $> \alpha$ $\Rightarrow$ do not reject H_0 at significance level α.

(b) Calculating a p-value depends on

- test statistics used,
- magnitude of calculated test statistics,
- whether H_1 is one-sided or two-sided. .