원의 방정식을 이차 방정식꼴로:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

전개 : $x^2+y^2\underbrace{-2ax}_{Ax}\underbrace{-2by}_{By}+\underbrace{a^2+b^2-r^2}_{C}=0$

이차방정식꼴 : $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

원의 방정식으로 변형 : $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$

$A^2 + B^2 - 4AC > 0$ 이면

중심 : $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$

반지름의 길이 : $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

예제 2 다음 세 점을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

$$P(1,\, 5),\ Q(-2,\, -4),\ R(5,\, 3)$$

원의 이차방정식을 이용하여 연립 방정식을 푼다^^

[풀이] (1) 구하는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

으로 놓자.

세 점 P, Q, R가 이 원 위에 있으므로

$$\begin{cases} 26 + A + 5B + C = 0 \\ 20 - 2A - 4B + C = 0 \\ 34 + 5A + 3B + C = 0 \end{cases}$$

이것을 풀면

$$A = -2,\ B = 0,\ C = -24$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$$

참고 $\overline{PQ}$의 수직이등분선과 $\overline{PR}$의 수직이등분선의 교점 C가 원의 중심이다.

$\overline{PQ}$의 수직이등분선 l은 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$을 지나므로, l의 방정식은

$$x + 3y = 1 \qquad \cdots ①$$

$\overline{PR}$의 수직이등분선 m은 기울기가 2이고 점 $(3, 4)$를 지나므로, m의 방정식은

$$2x - y = 2 \qquad \cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x = 1,\ y = 0 \qquad \therefore\ C(1,\ 0)$$

한편, 반지름의 길이는 $\overline{PC} = 5$이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + y^2 = 25$$

$$\therefore\ x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \qquad \cdots$$

예제 3 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=kx-2$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 k의 값의 범위를 구하여라.

x에 관한 2차 방정식으로 만들고 D>0을 이용한다^^

이차방정식의 근의 판별
계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0\,(a\neq 0)$에서 판별식을 $D=b'^2-4ac$라고 하면
① $\boxed{D>0 \Leftrightarrow \text{서로 다른 두 실근을 갖는다.}}$
② $D=0 \Leftrightarrow$ 중근을 갖는다.
③ $D<0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

예제 3 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=kx-2$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 k의 값의 범위를 구하여라.

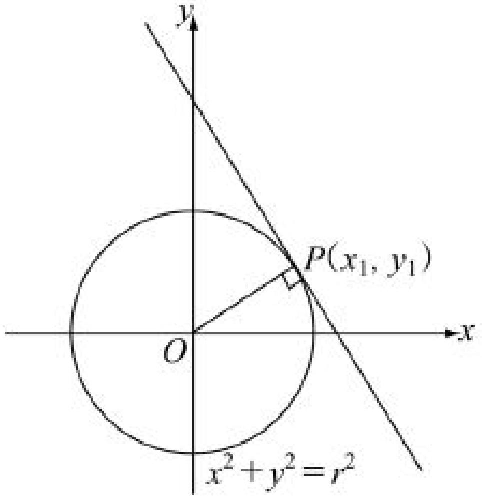
[풀이] $y=kx-2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+(kx-2)^2=1$$

$$(1+k^2)x^2-4kx+3=0$$

이고 $\frac{D}{4}=4k^2-3(1+k^2)>0$이므로 $k^2-3>0$

$\therefore k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$ ⋯ ○



기울기가 m인 원의 접선

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$$

접점이 주어진 원의 접선

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = r^2$$

기울기가 m인 원의 접선

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구하여 보자.

구하는 접선의 방정식을

$$y=mx+n$$

이라 하고 이것을 원 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2 \text{ 즉 } (m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$$

직선 $y=mx+n$이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하므로 (중근, D/4 = 0)

$$\frac{D}{4}=m^2n^2-(m^2+1)(n^2-r^2)=r^2(m^2+1)-n^2=0$$

그러므로 $n^2=r^2(m^2+1)$에서

$$n=\pm r\sqrt{m^2+1}$$

따라서, 구하는 접선의 방정식은

$$\boxed{y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}}$$

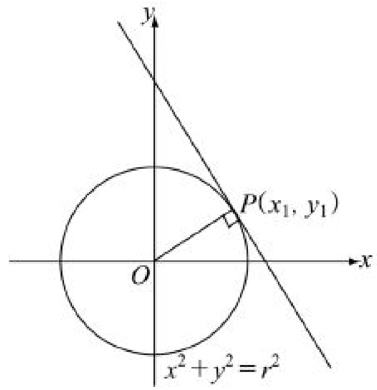
접점이 주어진 원의 접선

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

$x_1y_1\neq 0$이면 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{y_1}{x_1}$이고, 점 P를 지나는 접선은 직선 OP에 수직이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{y_1}$이다. 그러므로 접선의 방정식은

$m_1m_2 = -1$



$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

이것을 정리하면

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

그런데 $P(x_1,\ y_1)$은 원 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=r^2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $\boxed{x_1x+y_1y=r^2}$이다.

예제 4 점 $(1, 3)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

원의 접선방정식
연립방정식

접점이 주어진 원의 접선
원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $$x_1x+y_1y=r^2$$

[풀이] 접점을 (x_1, y_1)이라 하면 구하는 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 5 \quad \cdots ①$$

점 (1, 3)은 직선 ① 위의 점이므로

$$x_1 + 3y_1 = 5 \quad \cdots ②$$

또, 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \quad \cdots ③$$

②와 ③을 연립하여 풀면

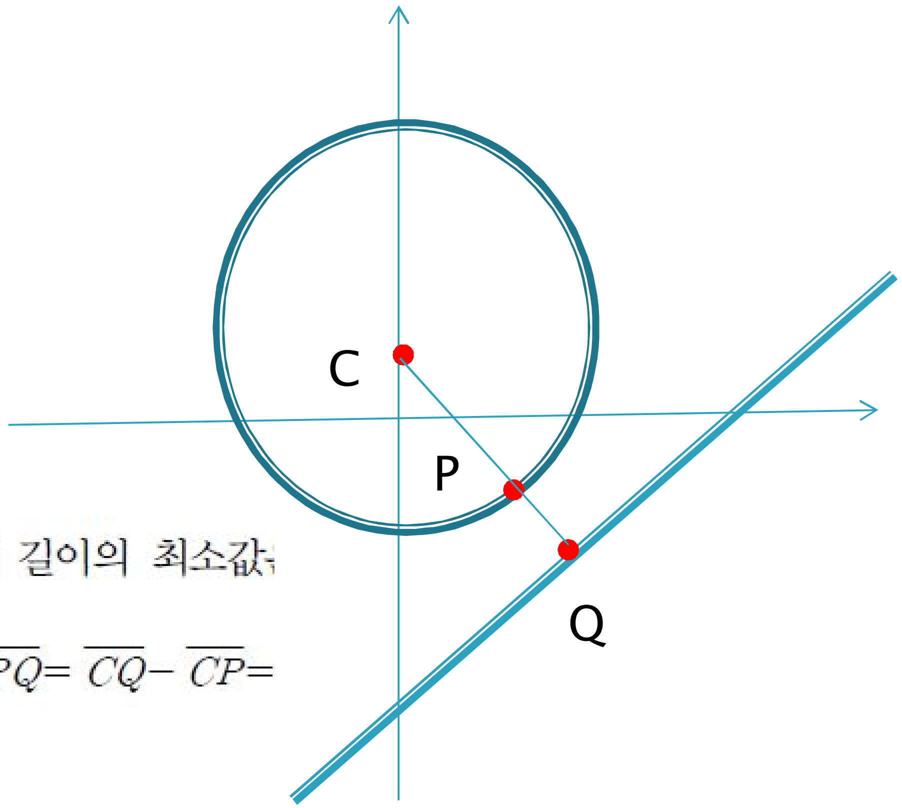
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

$x_1 = 2,\ y_1 = 1$을 ①에 대입하면 $2x + y = 5$

$x_1 = -1,\ y_1 = 2$를 ①에 대입하면 $-x + 2y = 5$

따라서 구하는 방정식은 $2x + y = 5$ 또는 $-x + 2y = 5$ $\cdots$ ○

예제 5 좌표평면에서 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $3x-4y-24=0$ 위를 움직이는 점 Q가 있다. 선분 PQ의 길이의 최소값을 구하여라.



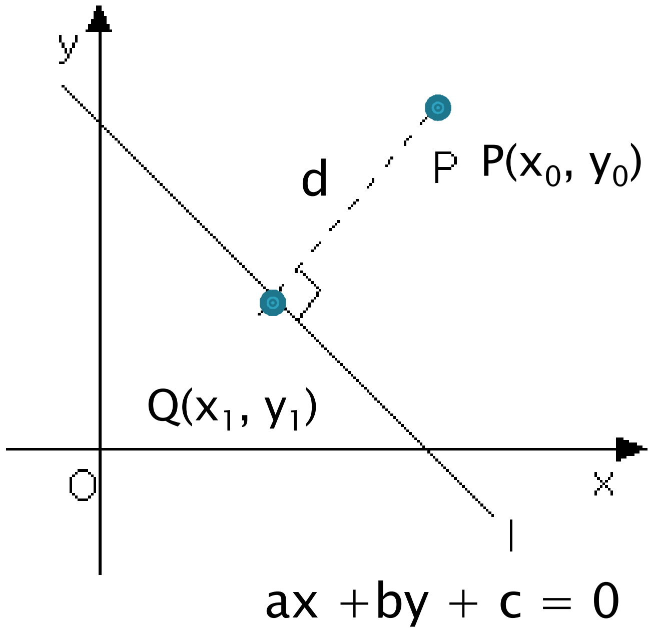
선분 PQ의 길이의 최소값

$\overline{PQ}=\overline{CQ}-\overline{CP}=$

점과 직선 사이의 거리

점 (x_0, y_0)와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



[풀이] $x^2+y^2-8y-9=0$에서

$$x^2+(y-4)^2=5^2$$

이므로 원의 중심을 C라 하면 $C(0,\ 4)$이고, 반지름의 길이가 5이다.

직선 PQ가 주어진 직선에 수직이고, 점 C를 지날 때, 선분 PQ의 길이는 최소가 된다. 그런데

$$\overline{CQ}=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=8$$

이므로 선분 PQ의 길이의 최소값은

$$\overline{PQ}=\overline{CQ}-\overline{CP}=8-5=3 \qquad \cdots ◘$$

예제 6 두 원 $x^2+y^2+4x-6y-96=0$, $x^2+y^2-18x-8y+48=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$에 대하여

두 원의 교점 A, B를 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0 \text{ (단, } k\neq-1)$$

이 원이 원점(0,0)을 지나면 x = 0, y = 0 을 대입하여
k를 구할 수 있다.

예제 6 두 원 $x^2+y^2+4x-6y-96=0$, $x^2+y^2-18x-8y+48=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

[풀이] 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2+y^2+4x-6y-96)+m(x^2+y^2-18x-8y+48)=0$$

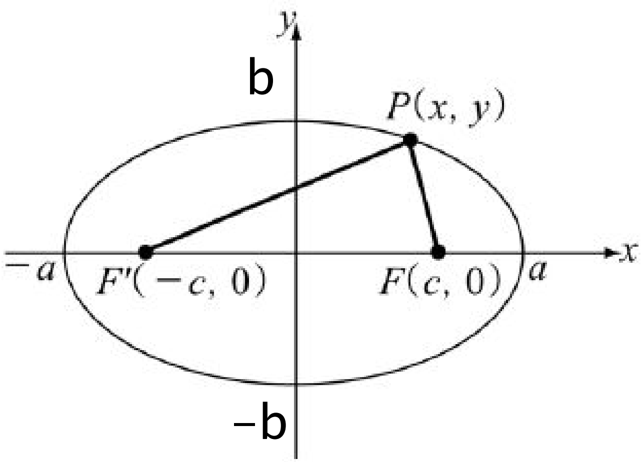
으로 놓을 수 있고, 이 원이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$$-96+48m=0 \quad \therefore\ m=2$$

대입하고 정리하면

$$3x^2+3y^2-32x-22y=0 \qquad \cdots \text{⚬}$$

예제 7 두 정점 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$에서의 거리의 합이 8이 되는 점들의 자취의 방정식을 구하여라.



$a > c$, $a^2 - c^2 > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[풀이] $a=4$ 이고 $c=2$ 이므로 $b=2\sqrt{3}$ 이다. 따라서 구하는 점들의 자취는 타원으로서 그 방정식은 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 이다. $\cdots$ ○