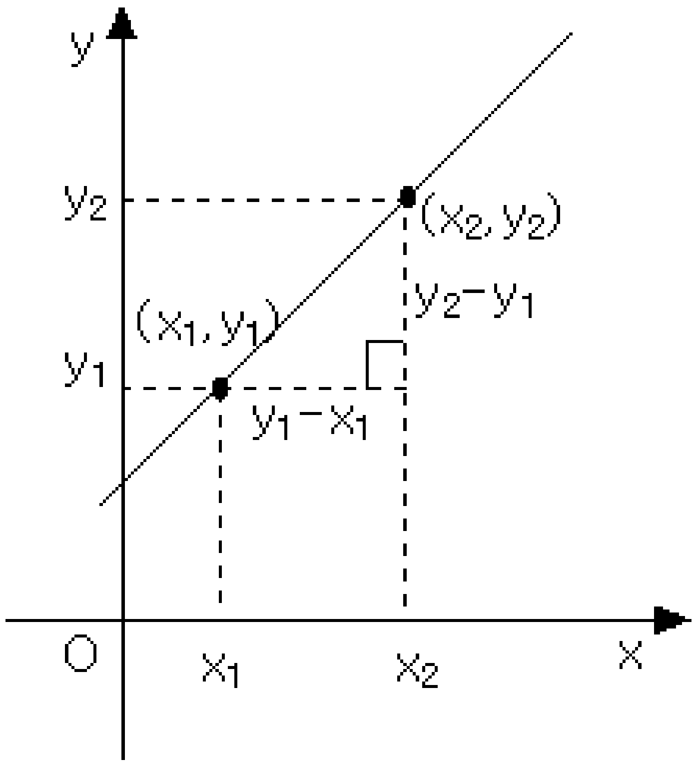
4.2 직선의 방정식

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 수직이 아닌 직선의 **기울기**(slope) m은

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

이다. 수직인 직선의 기울기는 정의하지 않으며 수평인 직선의 기울기는 $m = 0$이다.

x_2



$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

4.2 직선의 방정식

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

기울기가 m이고 점 (x_1, y_1)을 지나는 직선의 방정식을 구하여 보자. 직선 위의 임의의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

이므로

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

기울기가 m이고 y절편이 b인 직선의 방정식을 구하여 보자. y절편이 b라는 것은 점 $(0,\ b)$를 지나는 것이므로 기울기가 m이고 점 $(0,\ b)$를 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0) \quad \text{즉} \quad y = mx + b$$

기울기와 y절편이 주어진 직선의 방정식

기울기가 m이고 y절편이 b인 직선의 방정식은

$$y = mx + b$$

x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식을 구하여 보자. x절편이 a라는 것은 점 $(a, 0)$를 지나는 것이고 y절편이 b라는 것은 점 $(0, b)$를 지나는 것이므로, 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$를 지나는 직선의 방정식을 구하면 (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \rightarrow y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \text{ 즉 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

일차방정식의 그래프

x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$의 그래프는 직선이다.

(1) $a \neq 0$, $b \neq 0$인 경우, $ax+by+c=0$은

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

꼴의 일차함수로 변형되므로, ①의 그래프는 어느 좌표축에도 평행이 아닌 직선이다.

(2) $a \neq 0$, $b=0$인 경우, $ax+by+c=0$은

$$ax+c=0,\ \text{즉}\ x=-\frac{c}{a}$$

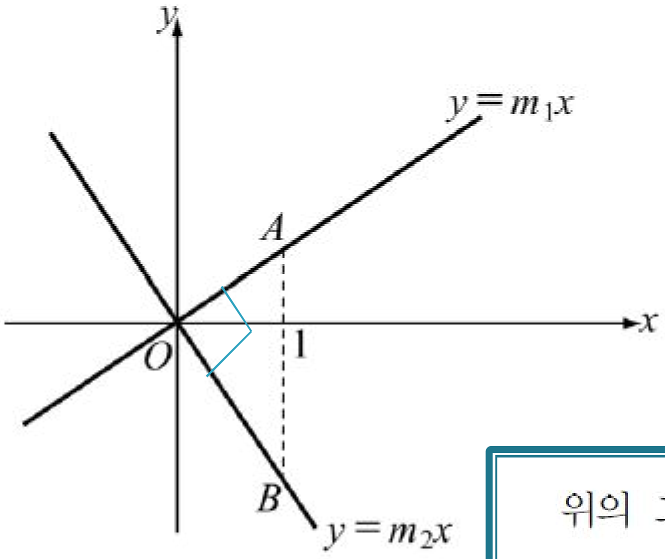
로 변형되므로 ①의 그래프는 y축에 평행한 직선이다.

(3) $a=0$, $b \neq 0$인 경우, $ax+by+c=0$은

$$by+c=0,\ \text{즉}\ y=-\frac{c}{b}$$

로 변형되므로 ①의 그래프는 x축에 평행한 직선이다.

4.3 두 직선의 위치 관계



기울기가 각각 m_1, m_2인 두 직선이 수직이기 위한 필요충분조건은

$$m_1m_2=-1$$

또 x축에 평행한 직선과 y축에 평행한 직선은 서로 수직이다.

위의 그림과 같이 두 직선 위의 점 $A(1,\ m_1)$, $B(1,\ m_2)$를 택하면, 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$$

이다. 즉,

$$(1+m_1^2)+(1+m_2^2)=(m_1-m_2)^2$$

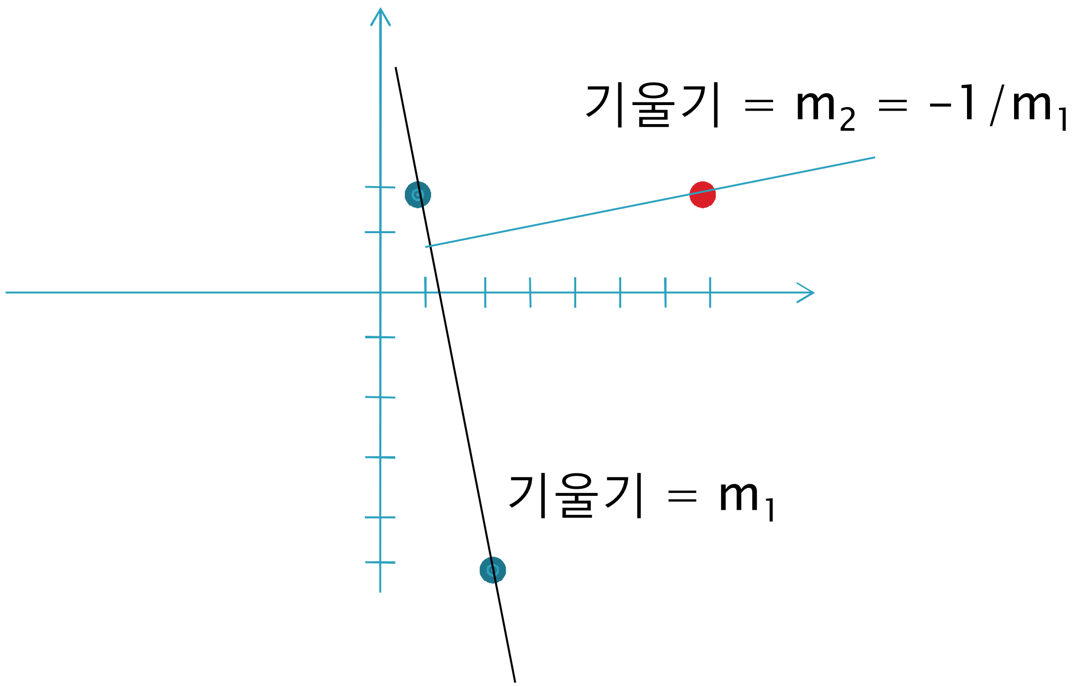
이므로 양변을 정리하면

$$m_1m_2=-1$$

예제 1 두 점 (1, 2), (2, −5)를 지나는 직선과 수직이며 점 (7, 2)를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

1. 두 점을 지나는 기울기
2. $m_1 m_2 = -1$

$$\boxed{y - y_1 = \overbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}^{m_1}(x - x_1)}$$



예제 1 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ -5)$를 지나는 직선과 수직이며 점 $(7,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

[풀이] 주어진 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$m = \frac{-5-2}{2-1} = -7$$

이므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{7}$이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{1}{7}(x-7)$$

이므로 정리하면

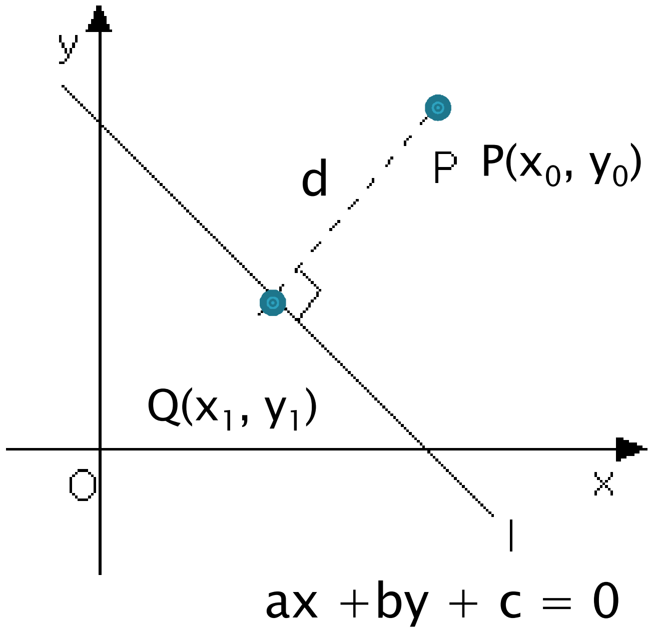
$$y = \frac{1}{7}x + 1$$

$\cdots$ ○

점과 직선 사이의 거리

점 $(x_0,\ y_0)$와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

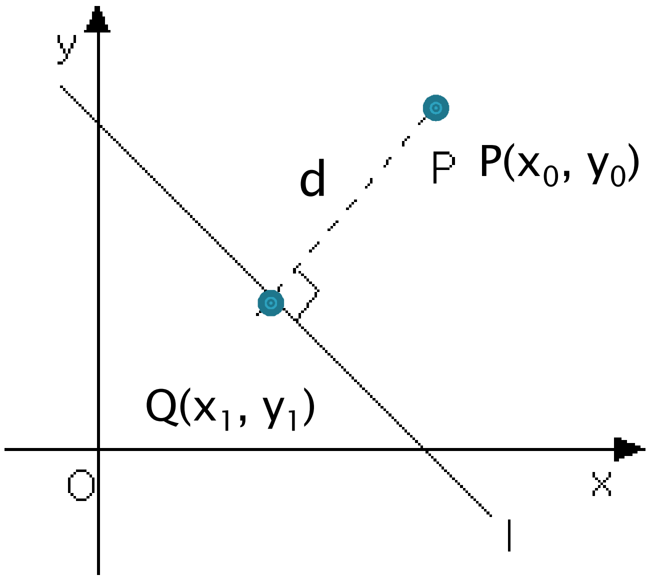
$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



점과 직선 사이의 거리

점 $(x_0,\ y_0)$와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



$$ax+by+c=0$$
$$ax_1+by_1+c=0$$

$$m_1m_2=-1$$

직선 l의 기울기가 $-\frac{a}{b}$이므로 직선 PQ의 기울기는 $\frac{b}{a}$이다. 따라서

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{b}{a} \qquad \cdots ①$$

점 Q는 직선 l 위에 있으므로 $Q(x_1,\ y_1)$

$$ax_1+by_1+c=0 \qquad \cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1=\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2},\quad y_1=\frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}$$

점 P에서 직선 l까지의 거리 d는 선분 PQ의 길이와 같으므로

$$\begin{aligned}
d&=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\\
&=\sqrt{\left(\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}-y_0\right)^2}\\
&=\sqrt{\frac{(-a^2x_0-aby_0-ac)^2+(-abx_0-b^2y_0-bc)^2}{(a^2+b^2)^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}\\
&=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

예제 2 평행한 두 직선 $x-2y+2=0$, $x-2y-4=0$ 사이의 거리를 구하여라.

한점과 직선사이의 거리^^

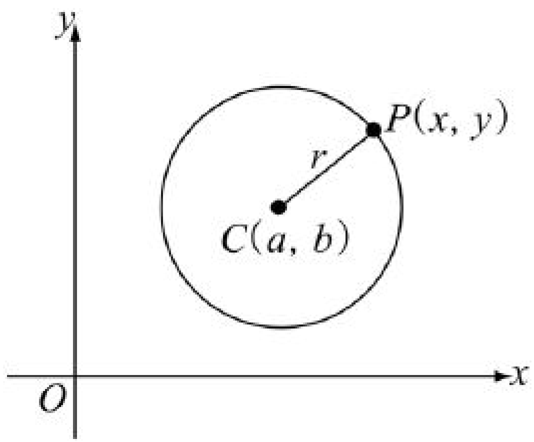
예제 2 평행한 두 직선 $x-2y+2=0$, $x-2y-4=0$ 사이의 거리를 구하여라.

[풀이] 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+2=0$ 위의 한 점 $(0,\ 1)$에서 다른 직선 $x-2y-4=0$까지의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$d=\frac{|0-2\cdot 1-4|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

4.4 원과 타원의 방정식



$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

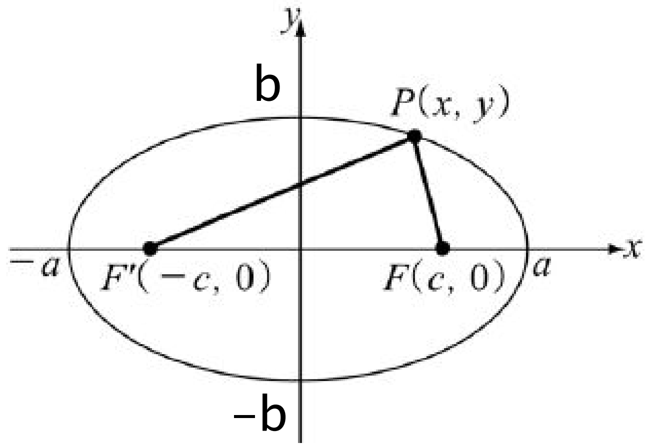
원의 방정식

중심이 $C(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$



$$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$a>c$, $a^2-c^2>0$, $b^2=a^2-c^2$

a^2b^2 으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$a = b = r$일 때 원의 방정식

$x^2 + y^2 = r^2$이 된다.

예제 1 두 점 $A(-1, 3)$, $B(5, -1)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

원의 중점 그리고 반지름 구한다
→ 원의 방정식

예제 1 두 점 $A(-1, 3)$, $B(5, -1)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

[풀이] 선분 AB의 중점을 $C(a, b)$라고 하면

$$a = \frac{-1+5}{2} = 2,\ \ b = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2, 1)$이고, 반지름의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$$

이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13 \qquad \cdots ㅇ$$