3.4 부등식

부등식 - 부등호를 사용하여 수 또는 식의 값의 대소 관계를 나타낸 식.

실수에 관한 대소관계.

부등식의 기본 성질
(1) $a > b,\ b > c$이면 $a > c$
(2) $a > b$이면 $a+c > b+c,\ a-c > b-c$
(3) $a > b,\ c > 0$이면 $ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
(4) $a > b,\ c < 0$이면 $ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

예제 1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $x-4<3(x+2)$ (2) $\frac{2}{3}x+1<\frac{1-x}{6}$

[풀이] (1) 괄호를 풀고 이항하여 정리하면 $-2x < 10$

양변을 -2로 나누면

$\therefore x > -5$

(2) 양변에 6을 곱하면 $4x+6 < 1-x$

이항하여 정리하면 $5x < -5$

양변을 5로 나누면

$\therefore x < -1$

절대값 포함한 일차부등식

절대값을 포함한 일차부등식
$a > 0$일 때
$\lvert x \rvert < a \iff -a < x < a$
$\lvert x \rvert > a \iff x < -a$ 또는 $x > a$

예제 2 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|3x-1|<4$

(2) $|2x-7|\geq 3$

(3) $|x+3|+|x-2|\leq 7$

[풀이] (1) 주어진 부등식은 $-4 < 3x-1 < 4$

$3x-1 > -4$에서 $3x > -3 \quad \therefore x > -1$

$3x-1 < 4$에서 $3x < 5 \quad \therefore x < \frac{5}{3}$

따라서 구하는 해는 $-1 < x < \frac{5}{3}$

(2) 주어진 부등식은 $2x-7 \leq -3$ 또는 $2x-7 \geq 3$

$\therefore 2x \leq 4$ 또는 $2x \geq 10$

따라서 구하는 해는

$x \leq 2$ 또는 $x \geq 5$

(3) (i) $x < -3$일 때, $-(x+3)-(x-2) \leq 7$

$-2x \leq 8$에서 $x \geq -4$ $\therefore -4 \leq x < -3$

(ii) $-3 \leq x < 2$일 때, $x+3-(x-2) \leq 7$

$5 \leq 7$이므로 항상 성립한다. $\therefore -3 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$일 때, $(x+3)+(x-2) \leq 7$

$2x \leq 6$에서 $x \leq 3$ $\therefore 2 \leq x \leq 3$

구하는 해는 (i), (ii), (iii)의 합집합이므로 $-4 \leq x \leq 3$

이차 부등식 → 모든 항을 좌변으로 이항하고 인수분해 하여 푼다.

이차부등식의 해
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$)이 서로 다른 두 실근 α, β ($\alpha<\beta$)를 가질 때
(1) $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
(2) $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$

(설명) $x^2 - x - 6 > 0$

$(x-3)(x+2) > 0$

x	$x<-2$	$x=2$	$-2<x<3$	$x=3$	$x>3$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$ yes	0 no	$-$ no	0 no	$+$ yes

따라서 $x^2-x-6>0$의 해는 $x<-2$ 또는 $x>3$

예제 ③ 다음 부등식을 풀어라.

(1) $-2x^2+3x-1 \geq 0$

(2) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq -1$

[풀이] (1) 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하면

$$2x^2-3x+1\le 0$$

$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$이므로 구하는 부등식의 해는

$$\frac{1}{2}\le x\le 1$$

(2) $(x-1)^2$을 양변에 곱하면

$$(x+1)(x-1) \le -(x-1)^2$$

좌변으로 이항하여 인수분해하면

$$(x-1)[(x+1)+(x-1)] \le 0$$
$$2(x-1)x \le 0$$

이므로 $0 \le x \le 1$ 그러나 $x=1$일 때 분모가 0이므로 구하는 해는

$$0 \le x < 1 \qquad \cdots \text{o}$$

예제 4 다음 연립부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 3x-2 \ge 1 & \cdots ① \\ x^2-x-6<0 & \cdots ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-3x+2>0 & \cdots ① \\ x^2-x-12 \le 0 & \cdots ② \end{cases}$

[풀이] (1) 부등식 ①을 풀면 $3x \geq 3$

$$\therefore\ x \geq 1 \quad \cdots ③$$

부등식 ②를 풀면 $(x+2)(x-3) < 0$

$$\therefore -2 < x < 3 \quad \cdots ④$$

따라서 구하는 연립부등식의 해는 ③과 ④를 동시에 만족시키는 x의 값이므로

$$\therefore\ 1 \leq x < 3$$

(2) 부등식 ①을 풀면 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$

$$\therefore x<1 \text{ 또는 } x>2 \quad \cdots ③$$

부등식 ②를 풀면 $x^2-x-12=(x+3)(x-4)\le 0$

$$\therefore -3\le x\le 4 \quad \cdots ④$$

따라서 구하는 연립부등식의 해는 ③과 ④를 동시에 만족시키는 x의 값이므로

$$\therefore -3\le x<1 \text{ 또는 } 2<x\le 4 \qquad \cdots \text{o}$$

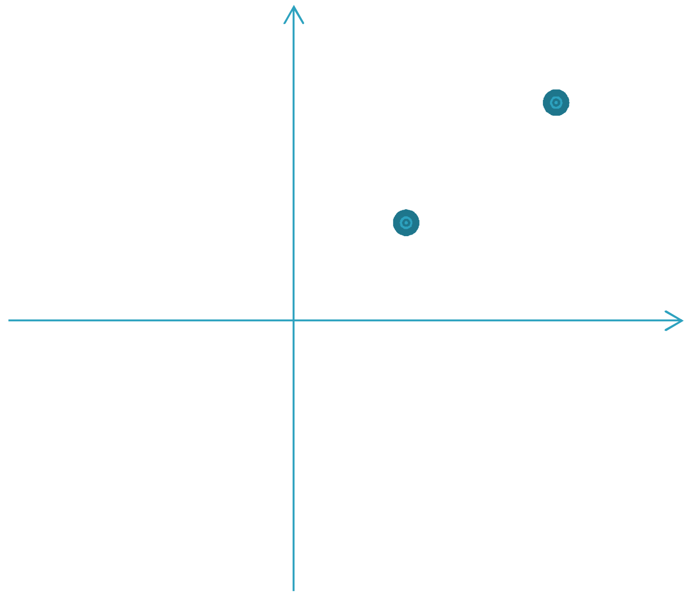
– 여기까지 3장 –

도 형 4

4.1 점과 좌표

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리는

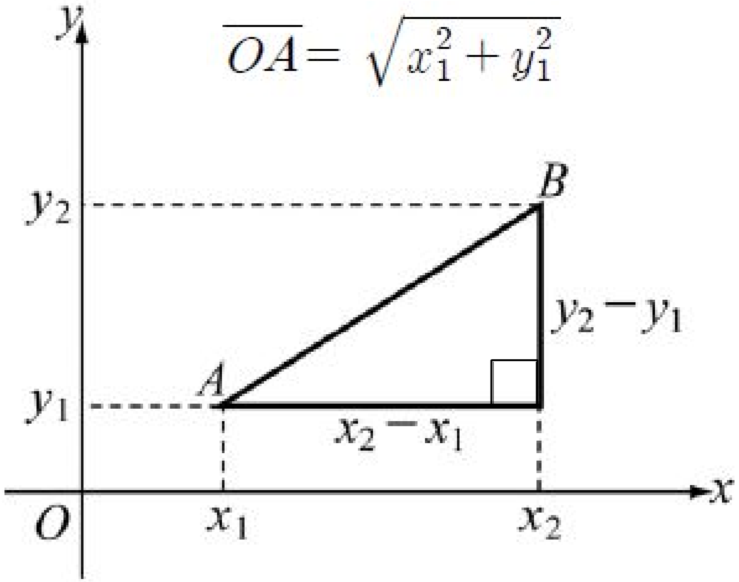
$$\overline{AB} = |x_2 - x_1|$$



$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

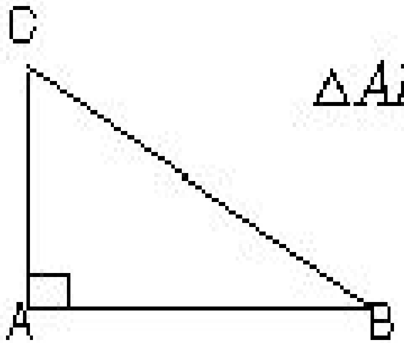
피타고라스 정리

$$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$



피타고라스의 정리

▶직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다.

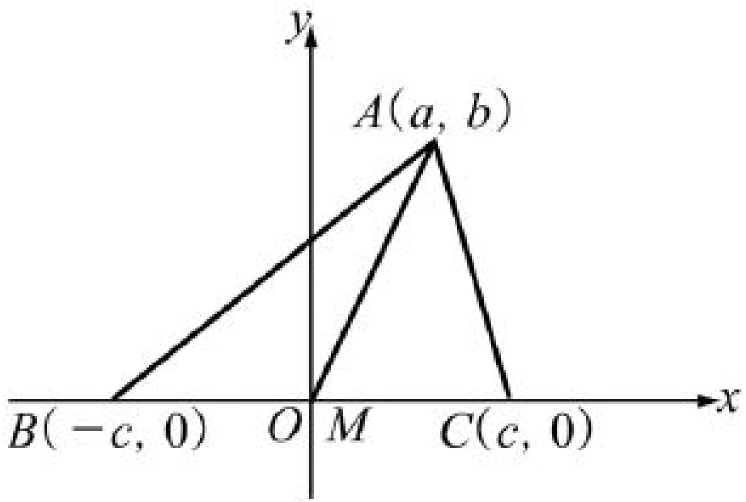


$\triangle ABC$에서 $\angle A = 90^{\circ}$ 이면

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

예제 1 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, 다음을 증명하라.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$



[풀이] 직선 BC를 x축, $\overline{BC}$의 수직이등분선을 y축으로 잡고 꼭지점의 좌표를 각각

$$A(a,\ b),\ B(-c,\ 0),\ C(c,\ 0)$$

으로 놓으면

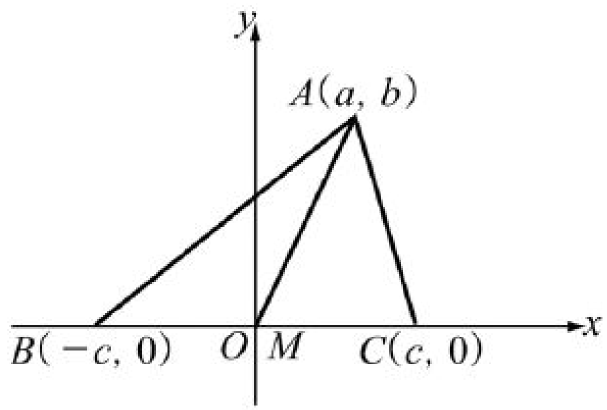
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

한편

$$\overline{AM}^2=a^2+b^2,\ \overline{BM}^2=c^2$$

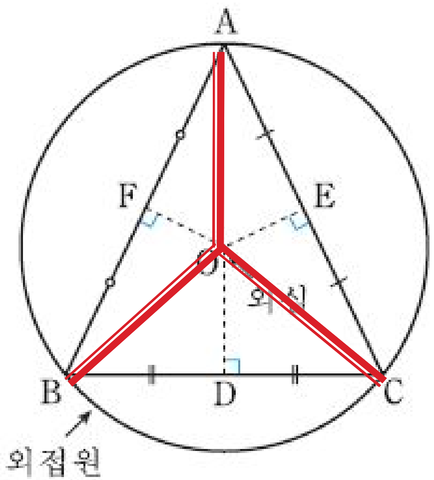
따라서

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$



예제 2 세 점 $A(5, 2)$, $B(1, -1)$, $C(1, 4)$를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 구하여라.

아래 그림의 점 O와 같이 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점을 삼각형 ABC의 **외심**이라 하고, 삼각형의 세 꼭지점을 전부 지나는 원을 삼각형 ABC의 **외접원**이라고 한다. 외심은 외접원의 중심과 일치한다. 따라서, 외심으로부터 삼각형 ABC의 세 꼭지점에 이르는 거리는 모두 같다.



O (x, y)

[풀이] 외심의 좌표를 $O(x, y)$라 하면

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$에서

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$$

$$\therefore 8x + 6y = 27 \qquad \cdots ①$$

$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2$에서

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2$$

$$10y = 15 \quad \therefore \ y = \frac{3}{2}$$

①에 의해 $x = \dfrac{9}{4}$

$$\therefore \ O\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

선분 AB 위의 점 P에 대하여

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n \ (m,\ n > 0)$$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m : n$으로 **내분**한다고 하고, 점 P를 **내분점**이라 한다.

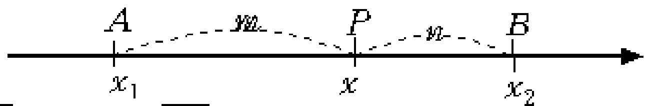
두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m : n \ (m,\ n > 0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n},\ \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 m=n

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

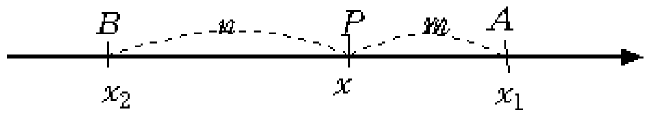
i) $x_1 < x_2$ 일 때 ($x_1 < x < x_2$)



$\overline{AP} = x - x_1$, $\overline{PB} = x_2 - x$이고, $(x - x_1) : (x_2 - x) = m : n$이므로

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

ii) $x_1 > x_2$ 일 때 ($x_1 > x > x_2$)



$\overline{AP} = x_1 - x$, $\overline{PB} = x - x_2$이고, $(x_1 - x) : (x - x_2) = m : n$이므로

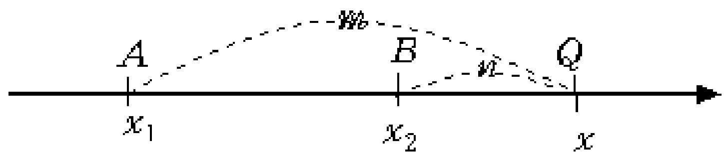
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $A(x_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m:n(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 $Q(x)$의 x좌표는

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

---

i) $m>n$ 일 때

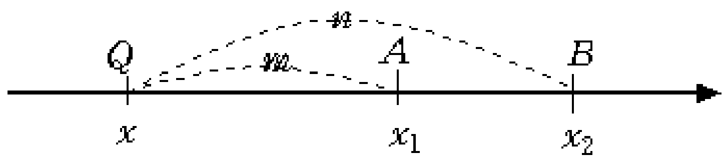


$\overline{AQ}=x-x_1$, $\overline{QB}=x-x_2$이고, $\overline{AQ}:\overline{QB}=m:n$이므로

$(x-x_1):(x-x_2)=m:n$

$$\therefore\ x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

ii) $m<n$일 때



$\overline{AQ}=x_1-x$, $\overline{QB}=x_2-x$이고, 이므로 $\overline{AQ}:\overline{QB}=m:n$이므로

$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$

$$\therefore\ x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

예제 3 점 $(1, 2)$와 점 (x, y)가 점 $(-1, 4)$에 대하여 대칭이 되도록 (x, y)를 구하여라.

중점 ^^

[풀이] 점 $(-1,\ 4)$가 점 $(1,\ 2)$와 점 $(x,\ y)$의 중점이므로

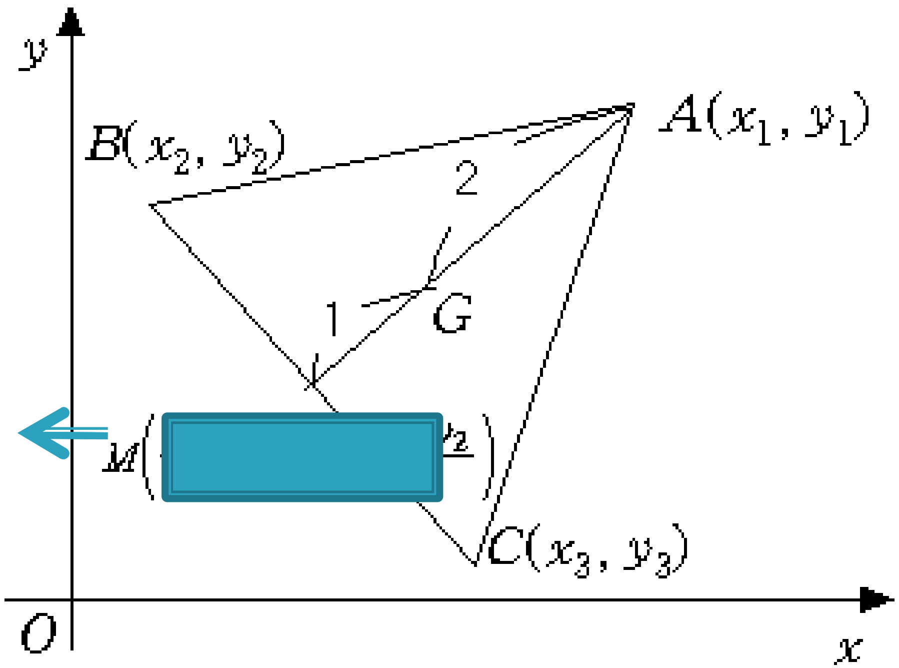
$$\left(\frac{1+x}{2},\ \frac{2+y}{2}\right)=(-1,\ 4)$$

이다. 따라서 $x=-3,\ y=6$ 즉 $(x,\ y)=(-3,\ 6)$

예제 4 세 점 $A(x_1, x_2)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

임을 보여라.



$(x_2+x_3)/2$, $(y_2+y_3)/2$

[풀이] 변 BC의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

무게중심 G는 선분 AM를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$G(x,\ y)$의 좌표는

$$x=\frac{2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\cdot\dfrac{y_2+y_3}{2}+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

따라서 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ $\cdots$ ○