3.2 이차방정식

a, b, c가 상수이고 $a \neq 0$일 때

$$ax^2 + bx + c = 0$$

꼴의 식을 **이차방정식**(quadratic equation)이라 한다.

해는 복소수 범위 내에 존재 : 실근 또는 허근

예제 1 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2 - x - 2 = 0$

(2) $x^2 + 2 = 0$

[풀이] (1) $x^2-x-2=0$에서 좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$x+1=0 \text{ 또는 } x-2=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

(2) $x^2+2=0$에서 좌변을 인수분해하면

$$x^2-(\sqrt{2}i)^2=0$$

$$(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)=0$$

$$x-\sqrt{2}i=0 \text{ 또는 } x+\sqrt{2}i=0$$

$$\therefore x=\sqrt{2}i \text{ 또는 } x=-\sqrt{2}i$$

이차방정식의 근의 공식(1)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

인수분해가 쉽지 않을 때

$$x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=5$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=5$$

$$\Leftrightarrow x+1=\pm\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

예제 2 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $3x^2+x-2=0$ (2) $x^2-2x+3=0$

[풀이] (1) 근의 공식에서 $a=3$, $b=1$, $c=-2$이므로

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3}=\frac{-1\pm5}{6}$$

$$\therefore x=\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=-1$$

(2) 근의 공식에서 $a=1$, $b=-2$, $c=3$이므로

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{2}$$

$$\therefore x=1\pm\sqrt{2}i$$

일차항의 계수가 짝수일 때 근의 공식

이차방정식의 근의 공식(2)

이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0\,(a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

- (1) $x^2+2x-1=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{2}$ → 두 개의 실근
  (2) $x^2-2x+2=0$에서 $x=1\pm i$ → 두 개의 허근
  (3) $x^2-4x+4=0$에서 $x=2$ → 중근

- $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$가 실수인지 허수인지는 근호 안에 있는 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 결정된다.

- **이차방정식의 근의 판별**

  계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0\,(a\neq 0)$에서 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 하면

  ① $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

  ② $D=0 \Leftrightarrow$ 중근을 갖는다.

  ③ $D<0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

예제 3 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하여라.

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + 2b'x + c = 0\,(a \neq 0)$에서 판별식을 $D = b^2 - 4ac$라고 하면

① $D > 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D = 0 \Leftrightarrow$ 중근을 갖는다.

③ $D < 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

[풀이] 주어진 이차방정식이 실근을 가지려면 $D=b^2-4ac \geq 0$이어야 한다.

$3x^2-6x+k=0$에서 $a=3$, $b=-6$, $c=k$이므로

$$D=(-6)^2-4 \cdot 3 \cdot k \geq 0$$

$$\therefore\ k \leq 3 \qquad \cdots ㉠$$

근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 두 근 α, β는

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\text{(단, }D=b^2-4ac\text{)}$$

이므로

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

두 수와 이차방정식의 근

합이 p, 곱이 q인 두 수는 다음 이차방정식의 근이다.

$$x^2 - px + q = 0$$

두 수 α, β를 근으로 갖는 이차방정식 중 하나는 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 으로 나타내어지고 이 때, 이것의 좌변을 전개하면 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ 이 된다.

$q = \alpha\beta$

$p = \alpha + \beta$

예제 4 두 수 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$를 근으로 갖는 이차방정식을 구하여라.

[풀이] 두 수 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$의 합을 p, 곱을 q라고 하면

$$p=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2$$
$$q=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=1-(-2)=3$$

이 때, 두 근의 합과 곱이 각각 2와 3이므로 구하는 방정식은 다음과 같다.

$\therefore x^2-2x+3=0$ $\cdots$ o

3.3 고차방정식과 연립방정식

해법

고차방정식 : 차수가 3차 이상

1. 인수분해 공식이용
2. 인수정리 이용 조립제법

3. 쉽게 인수분해 되지 않고 복잡 → 치환하여 → 인수분해

→ 원래 방정식의 해 구한다.

복습^^

인수분해 공식

(0) $ax+ay=a(x+y)$

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(5) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3,$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(7) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(8) $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}
$$

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

복습^^

$f(a) = 0$

$$f(x) = (x - a)q(x)$$

복습^^

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 2 & 5 & 6 \\
 & & -4 & -2 \\
\hline
 & 2 & 1 & 4
\end{array}
$$

몫 : $2x+1$ 나머지 : 4

계수들만 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**

예제 1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3 = 1$ $\longrightarrow$ $x^3 - 1 = 0$

(2) $\underline{x^3 + 3x^2} - \underline{4x - 12} = 0$

(3) $x^3 - 5x - 2 = 0$ $\longrightarrow$ $f(-2) = 0$

(4) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ $\longrightarrow$ $f(-1) = 0$

[풀이] (1) 주어진 방정식의 우변을 이항하면 $x^3-1=0$

좌변을 인수분해하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

그러므로 $x-1=0$ 또는 $x^2+x+1=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(2) 좌변을 인수분해하면

$$x^2(x+3)-4(x+3)=0$$

$$(x+3)(x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3,\ -2,\ 2$$

(3) $f(x)=x^3-5x-2$로 놓으면 $f(-2)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다. 다음 조립제법에서

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\
 & & -2 & 4 & 2 \\
\hline
 & 1 & -2 & -1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$$f(x)=(x+2)(x^2-2x-1)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+2)(x^2-2x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } 1\pm\sqrt{2}$$

(4) $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$이라 하면

$$f(-1)=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$f(x)=(x+1)(x^3-4x^2+7x-6)$$
$$g(x)=x^3-4x^2+7x-6$$

이라 하면

$$g(2)=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$g(x)=(x-2)(x^2-2x+3)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$$

이므로 구하는 해는

$$\therefore x=-1,\ 2 \text{ 또는 } 1\pm\sqrt{2}i$$

예제 2 다음 방정식을 풀어라.

치환

(1) $x^4 - \underline{4x^2} + 3 = 0$

(2) $x^{1/3} - \underline{x^{1/6}} - 6 = 0$

(3) $(\underline{x^2 - 3x} + 4)(\underline{x^2 - 3x} - 3) = 8$

(4) $\underline{x^4} - \underline{3x^3} + \underline{4x^2} - \underline{3x} + 1 = 0$

[풀이] (1) $x^2 = t$로 치환하면 $t^2 - 4t + 3 = 0$

t에 관한 이차방정식이므로 좌변을 인수분해하면

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

$t = x^2$이므로 $x^2 = 1$ 또는 $x^2 = 3$

$$\therefore x = \pm 1 \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{3}$$

(2) $x^{1/6}=t$로 치환하면 $t^2-t-6=0$이다. 이 식을 인수분해하면

$$(t-3)(t+2)=0$$

이지만 $t=x^{1/6}$은 음수가 될 수 없으므로 $t+2\neq 0$이다. 따라서

$$t=x^{1/6}=3$$

이므로

$$\therefore\ x=3^6=729$$

(3) $x^2-3x=t$로 치환하면 $(t+4)(t-3)=8$ 즉 $t^2+t-20=0$

인수분해하면 $(t+5)(t-4)=0$

$$\therefore\ t=4,\ t=-5$$

(i) $x^2-3x=4$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$$\therefore x=-1,\ x=4$$

(ii) $x^2-3x=-5$에서 $x^2-3x+5=0$

근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot5}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$$

따라서 구하는 해는

$$\therefore x=-1,\ x=4,\ x=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$$

(4) 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

그런데 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로 주어진 방정식은

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $t^2-3t+2=0$

인수분해하면 $(t-1)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=1,\ t=2$

(i) $x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$ $\quad\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $x+\frac{1}{x}=2$에서 $x^2-2x+1=0$ $\quad\therefore x=1$

따라서 구하는 해는

$$\therefore x=1(\text{중근}),\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

예제 3 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$의 한 근이 $1-i$일 때, 실수 p, q의 값 및 나머지 두 근을 구하여라.

$1-i$가 근이므로 대입하면 주어진 방정식을 만족

[풀이] (1) $1-i$가 근이므로 대입하면 주어진 방정식을 만족시켜야 한다. 즉

$$(1-i)^3+(1-i)^2+p(1-i)+q=0$$

전개하여 i에 관해서 정리하면 $(p+q-2)+(-p-4)i=0$

p, q는 실수이므로 $p+q-2=0$, $-p-4=0$

$$\therefore p=-4,\ q=6$$

이 때, 주어진 방정식은 $x^3+x^2-4x+6=0$

f(−3) = 0
조립제법

$$\therefore (x+3)(x^2-2x+2)=0$$

$$\therefore x=-3,\ x=1\pm i$$

따라서 구하는 답은 $p=-4$, $q=6$, $x=-3$, $x=1+i$

(2) 주어진 방정식이 실계수 방정식이므로 $1+i$도 근이다. 인수정리에 의해 주어진 방정식은 다음을 인수로 갖는다.

$$[x-(1-i)][x-(1+i)]=x^2-2x+2$$

x^3+x^2+px+q를 x^2-2x+2로 나누면 몫이 $x+3$이고 나머지가 $(p+4)x+(q-6)$인데, 나누어떨어지므로

$$(p+4)x+(q-6)=0 \quad \therefore p=-4, \quad q=6$$

다음은 풀이 (1)과 같다. $\cdots$○

예제 4 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$(1)\ \begin{cases} 2x+y-z=8 & \cdots ① \\ x-y+3z=-4 & \cdots ② \\ 3x+2y+z=11 & \cdots ③ \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x+y=1 & \cdots ① \\ y+z=3 & \cdots ② \\ x+z=8 & \cdots ③ \end{cases}$$

미지수가 **3개**인 연립**일차**방정식

→ 한 변수를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차 방정식으로 만든 후 푼다.

[풀이] (1) 먼저 z를 소거하기 위해서 ①×3+②를 하면

$$7x+2y=20 \qquad \cdots ④$$

①+③을 하면

$$5x+3y=19 \qquad \cdots ⑤$$

④와 ⑤를 연립하여 풀면 $x=2,\ y=3$

$x=2,\ y=3$을 ①에 대입하면 $z=-1$

$$\therefore x=2,\ y=3,\ z=-1$$

(2) ①+②+③을 하면 $2x+2y+2z=12$이므로

$$x+y+z=6 \qquad \cdots ④$$

④−①하면 $z=5$

④−②하면 $x=3$

④−③하면 $y=-2$

$$\therefore x=3,\ y=-2,\ z=5$$

예제 5 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

(1) $\begin{cases} x - y = 2 & \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 10 & \cdots ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 & \cdots ① \\ 2x^2 + y^2 = 36 & \cdots ② \end{cases}$

미지수가 **2개**인 연립**이차**방정식

→ 한 문자에 관해서 풀어서 다른 이차방정식에 대입하여 푼다.

[풀이] (1) ①을 y에 대하여 풀면 $y = x - 2$ $\cdots$ ③

미지수 y를 소거하기 위하여 ③을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10 &\Leftrightarrow x^2 + (x-2)^2 = 10 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore x = 3$ 또는 $x = -1$

$x = 3$을 ③에 대입하면 $y = 1$

$x = -1$을 ③에 대입하면 $y = -3$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$

(2) ①의 좌변을 인수분해하면

$$(x-2y)(2x+y)=0 \quad \therefore x=2y \text{ 또는 } y=-2x$$

$x=2y$일 때, 이것을 ②에 대입하여 정리하면 $y^2=4$

$$\therefore y=2 \text{ 또는 } y=-2$$

$$\therefore x=4,\ y=2 \text{ 또는 } x=-4,\ y=-2$$

$y=-2x$일 때, 이것을 ②에 대입하여 정리하면 $x^2=6$

$$\therefore x=\sqrt{6} \text{ 또는 } x=-\sqrt{6}$$

$$\therefore x=\sqrt{6},\ y=-2\sqrt{6} \text{ 또는 } x=-\sqrt{6},\ y=2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 해는

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-2\sqrt{6} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=2\sqrt{6} \end{cases}$$

…ㅇ