2.4 3차원 응력계

∗ 주응력(principle stress) → 수직응력 σ_n과 총응력 σ가 일치

- 한 점에서의 응력이 그것이 작용하는 면에 수직일 때, 다시 말해
  그 면에 작용하는 수직응력만 존재할 때 (전단응력 성분 = 0) 그 응력을 '주응력'이라 한다.

$$\sigma_P \tilde{n} = \sigma_1 \tilde{a}_1 + \sigma_2 \tilde{a}_2 + \sigma_3 \tilde{a}_3 \qquad \text{—— ①}$$

여기서, $\tilde{n}$: 수직 단위 벡터
$\tilde{a}_i$: x_i 방향의 단위 벡터

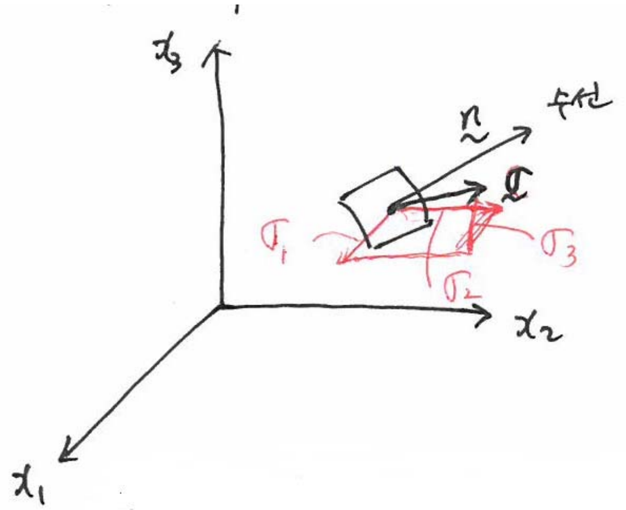
$$\sigma_P \tilde{n} \cdot \tilde{a}_1 = \sigma_P l_1 = \sigma_1 \qquad \text{—— ②}$$

$\tilde{n}$와 x_i축과 이루는 각

여기서, l_i : 방향여현(방향코사인), $l_1 = \cos(n, x_1) = \tilde{n} \cdot \tilde{a}_1$

$\tilde{n}$의 x_1, x_2, x_3 축 방향의 성분

x_1축의 단위 벡터

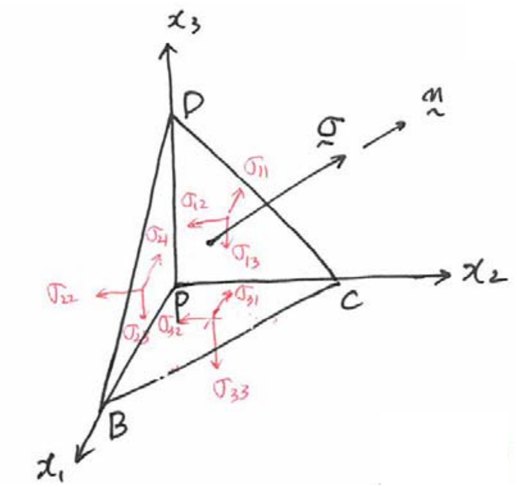


$$\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$$
$$\sigma \tilde{a} = \sigma_1 \tilde{a}_1 + \sigma_2 \tilde{a}_2 + \sigma_3 \tilde{a}_3$$

ex) σ_n : 응력의 수직성분 (수직응력)

$$\sigma_n = \sigma \tilde{a} \cdot \tilde{n} = \sigma_1 \tilde{a}_1 \cdot \tilde{n} + \sigma_2 \tilde{a}_2 \cdot \tilde{n} + \sigma_3 \tilde{a}_3 \cdot \tilde{n}$$
$$= \sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3$$

＊ 3차원 응력계 (4면체) - 임의의 경사면의 응력성분은?



σ_{ij}는 주어짐 임의의 좌표계에서 응력성분)

면 BCD = A 면적

면적A → 0으로 접근하면
한 점 P의 응력이 됨.

면적 $CPD = A_1 = Al_1$

면적 $BPD = A_2 = Al_2$

면적 $BPC = A_3 = Al_3$

여기서 l_1, l_2, l_3는 방향여현

- 4면체에 작용하는 모든 힘의 합 = 0

$$\Sigma F_1 = \Sigma F_2 = \Sigma F_3 = 0$$

x_1축 방향의 모든 힘의 합 = 0

$$\Sigma F_1 = \sigma_1 A - \sigma_{11} A_1 - \sigma_{21} A_2 - \sigma_{31} A_3$$
$$= \sigma_1 A - \sigma_{11} A l_1 - \sigma_{21} A l_2 - \sigma_{31} A l_3 = 0 \quad \text{—— ③}$$

BCD 면 상의
총응력 σ의
x_1축 방향 성분

식 ③에서

$$\sigma_1 A = \sigma_{11} A l_1 + \sigma_{21} A l_2 + \sigma_{31} A l_3$$

$$\therefore \sigma_1 = \sigma_{11} l_1 + \sigma_{21} l_2 + \sigma_{31} l_3 \quad \text{—— ④}$$

임의의 좌표축의 응력성분 σ_{ij}가 주어지면, 임의의 경사면상의 한 점에서 응력 $\sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$가 구해짐.

$$\therefore \underline{\sigma = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{1/2}}$$

$\downarrow$

수직응력(경사면에 대한) σ_n

$$\sigma_n = \sigma \tilde{a} \bullet \tilde{n} = \sigma_1 \tilde{a}_1 \bullet \tilde{n} + \sigma_2 \tilde{a}_2 \bullet \tilde{n} + \sigma_3 \tilde{a}_3 \bullet \tilde{n}$$

$$* \ (\sigma_{11} l_1 + \sigma_{21} l_2 + \sigma_{31} l_3) l_1 = \sigma_{11} l_1^2 + \sigma_{21} l_2 l_1 + \sigma_{31} l_3 l_1$$

like the same manner,

$$\sigma_2 A = \sigma_{12} A l_1 + \sigma_{22} A l_2 + \sigma_{32} A l_3$$
$$\sigma_3 A = \sigma_{13} A l_1 + \sigma_{23} A l_2 + \sigma_{33} A l_3$$

따라서,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_P l_1 = \sigma_{11} l_1 + \sigma_{21} l_2 + \sigma_{31} l_3 \\ \sigma_2 &= \sigma_P l_2 = \sigma_{12} l_1 + \sigma_{22} l_2 + \sigma_{32} l_3 \\ \sigma_3 &= \sigma_P l_3 = \sigma_{13} l_1 + \sigma_{23} l_2 + \sigma_{33} l_3 \end{aligned} \quad \text{—— ⑤}$$

$$\begin{bmatrix} (\sigma_P - \sigma_{11}) & -\sigma_{21} & -\sigma_{31} \\ -\sigma_{12} & (\sigma_P - \sigma_{22}) & -\sigma_{32} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & (\sigma_P - \sigma_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{—— ⑥}$$

$l_1, l_2, l_3 \neq 0$ 이므로,

$$\begin{vmatrix} (\sigma_P - \sigma_{11}) & -\sigma_{21} & -\sigma_{31} \\ -\sigma_{12} & (\sigma_P - \sigma_{22}) & -\sigma_{32} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & (\sigma_P - \sigma_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{—— ⑦}$$

$$\therefore \sigma_P^3 - J_1 \sigma_P^2 - J_2 \sigma_P - J_3 = 0 \quad \text{—— ⑧}$$

여기서 $$\begin{pmatrix} J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ J_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ J_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \end{pmatrix}$$

- J_1, J_2, J_3는 좌표축의 선택과는 무관한 양이며, 응력이 가해진 점에서의 3개의 응력불변량(Stress invariant, eigenvalue)라고 한다.

- 주응력과 주응력계는 하중에 의해 정해지고, x_1, x_2, x_3 축에 의해 변하지 않는다. 따라서 σ_P은 x_1, x_2, x_3 축의 선택에 따라 불면이므로 식 ⑧에서 J_1, J_2, J_3도 x_1, x_2, x_3 축의 선택에 따라 변하지 않는다.

- $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ 조건과 구해진 $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$를 대입하면 l_1, l_2, l_3를 구할 수 있음.
  → 주응력면 확인

＊ In case of $\sigma_z (= \sigma_{33}) = \tau_{yz} (= \sigma_{23}) = \tau_{zx} (= \sigma_{31}) = 0,$ (2차원 상태 응력)

식 ⑧에서,

$$\sigma_P^3 - J_1 \sigma_P^2 - J_2 \sigma_P - J_3 = 0$$

here, $\begin{pmatrix} J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ J_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{12}^2 \\ J_3 = 0 \end{pmatrix}$

therefore,

$$\sigma_P (\sigma_P^2 - J_1 \sigma_P - J_2) = 0$$

$$\therefore \begin{matrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{matrix} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

평면응력 조건에서의 주응력 값