

2.3 유리식과 무리식

유리식 : 다항식 A, B에 대하여 $B \neq 0$ 일 때, A/B 꼴로 나타내어 질 수 있는 식.

분수식 : 분모 B가 상수가 아닌 유리식 A/B 꼴로 나타내어 지는 식

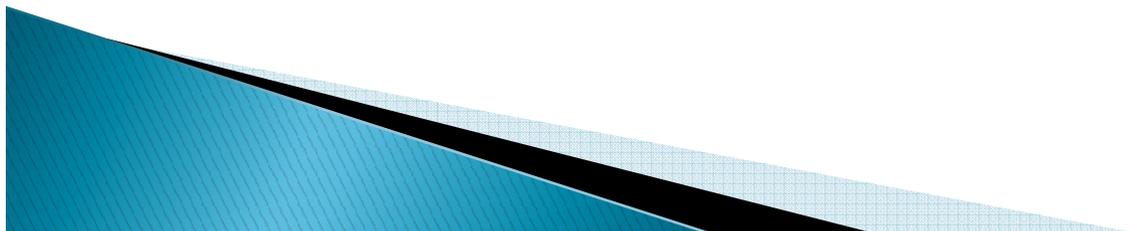
(분모 B가 상수이면 유리식 A/B 는 다항식)

(1) $\frac{A}{B}$ 가 유리식이고 C가 0이 아닌 다항식일 때

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C}$$

$$(2) \quad \frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

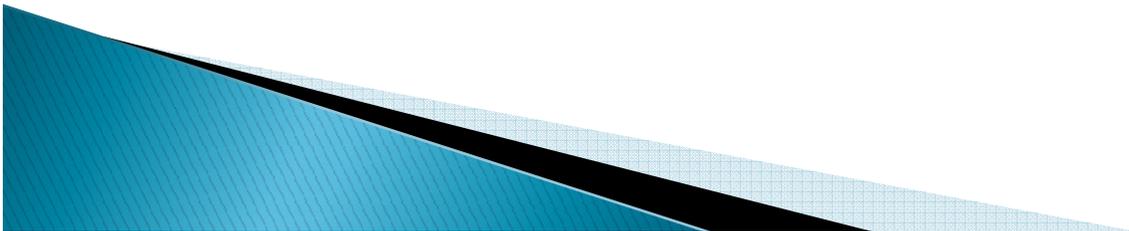
$$(3) \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$



2.3 유리식과 무리식

분수식 약분하기 : 분수식의 분자, 분모에 공약수가 있을 때, 이 공약수로
분자, 분모를 나누어 간단히 한다.

기약분수식 : 분수식에서 분자와 분모를 그들의 최대 공약수로 나누어 주면
분자와 분모가 서로소가 되는 분수식.



예제 1 다음 유리식을 간단히 하여라.

$$(1) \frac{x}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4}$$

$$(2) \frac{x+1 + \frac{1}{x-1}}{x-1 - \frac{1}{x-1}}$$

$$(3) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$(4) \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

[풀이] (1)
$$\frac{x}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} + \frac{4x}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x(x-2+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x}{x-2}$$

(2)
$$\frac{x+1 + \frac{1}{x-1}}{x-1 - \frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{x^2}{x-1}}{\frac{x^2-2x}{x-1}}$$

$$= \frac{x^2}{x-1} \div \frac{x^2-2x}{x-1}$$

$$= \frac{x^2}{x-1} \times \frac{x-1}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x}{x-2}$$

(3)
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= 1 + \frac{x}{x+1}$$

$$= \frac{x+1+x}{x+1}$$

$$= \frac{2x+1}{x+1}$$

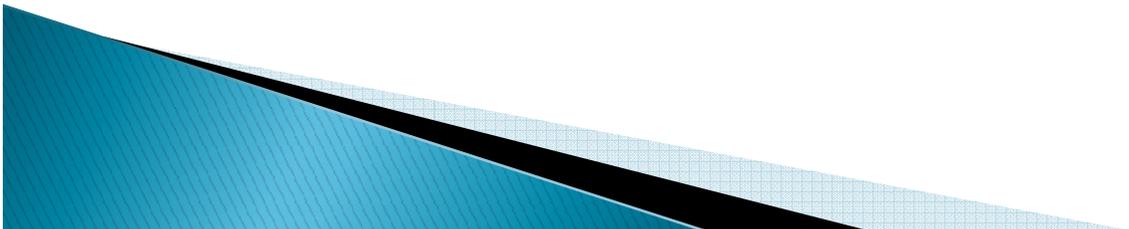
(4)
$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}}$$

$$= \frac{-1}{x(x+h)}$$

이중근호 : 근호 안에 근호가 들어 있는 것 $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$
밖의 근호 없앨 수 있구나

$$\begin{aligned}\sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{2+3+2\sqrt{2}\times 3} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{2}+\sqrt{3}\end{aligned}$$



양수 a, b 에 대하여

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

이 성립하므로 다음 결과를 얻는다.

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a > b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

예제 2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a > b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

[풀이] (1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}}$
 $= \sqrt{4+3-2\sqrt{4\times 3}}$
 $= \sqrt{4}-\sqrt{3}$
 $= 2-\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{5+1-2\sqrt{5\times 1}}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

무리식 – 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식.

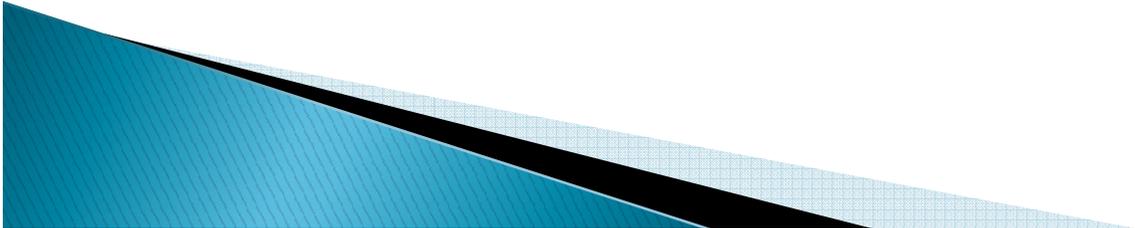
$$\sqrt{x-1}, x - \sqrt{x^2+1}, \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \frac{x-2}{\sqrt{x}}$$

- 식의 값이 실수가 되도록 문자의 값 범위 제한.
→ 근호 안의 값이 0 또는 양수가 되도록 제한

$$x + \sqrt{1-2x}$$

$$1 - 2x \geq 0.$$

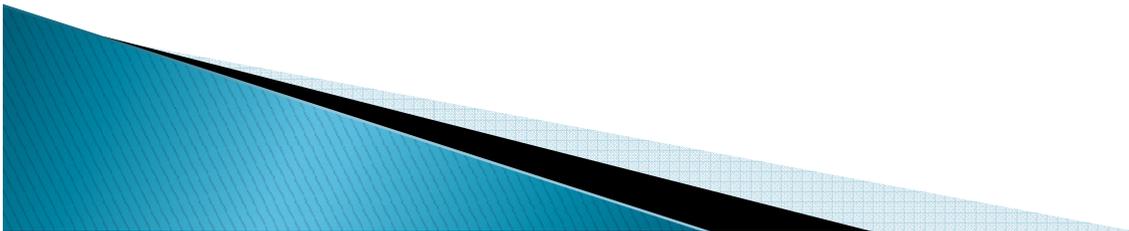
$$x \leq \frac{1}{2}$$



예제 3 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x 의 값의 범위를 정하여라.

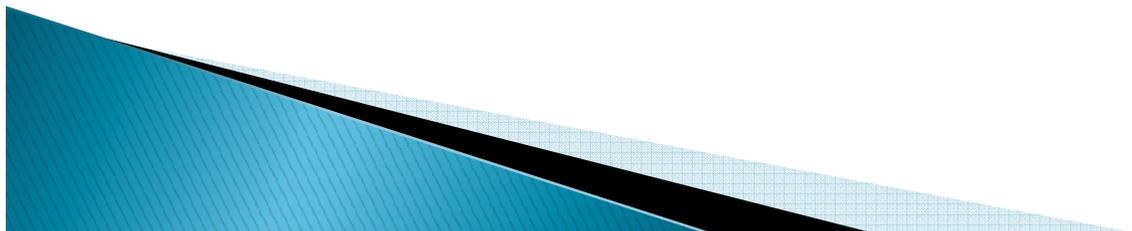
(1) $2 + \sqrt{3x - 2}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$



[풀이] (1) $3x - 2 \geq 0$ 이어야 하므로 $x \geq \frac{2}{3}$

(2) 먼저 $1 + x \geq 0$, $1 - x \geq 0$ 이어야 하므로 $-1 \leq x \leq 1$. 그런데 분모에 있는 $\sqrt{1+x}$ 와 $\sqrt{1-x}$ 가 동시에 0일 수 없으므로 구하는 x 의 값의 범위는 $-1 \leq x \leq 1$ ◉



예제 4

(1) $\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$ 을 간단히 하여라.

(2) $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ 일 때, $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ 의 값을 구하여라.

x를 먼저 간단히 한다. 그리고 간단히 한다.

[풀이] (1)
$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})}$$

$$= \frac{2\sqrt{x+2}}{(x+2) - x} = \sqrt{x+2}$$

(2) $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$ 이므로 $\sqrt{x} = \sqrt{2}+1$ 이다. 따라서

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} + \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$$

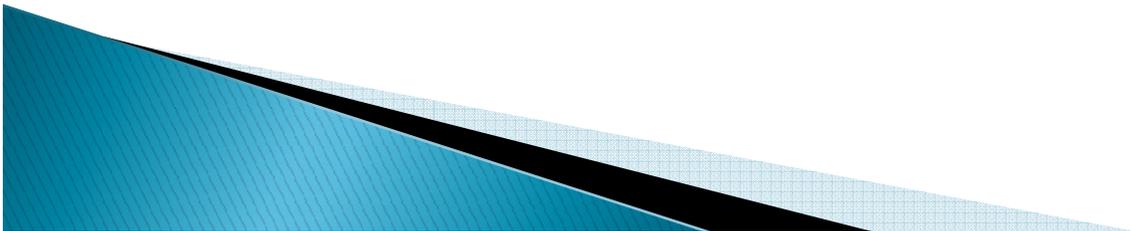
$$= \frac{4(2+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$= 2(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

$$= 2\sqrt{2}$$

... ○

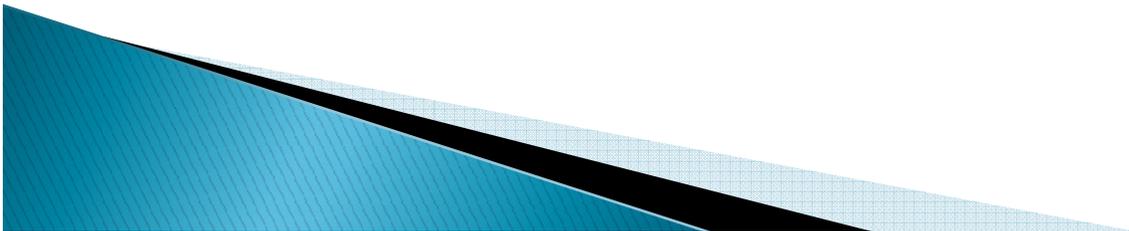
방정식과 부등식



3.1 간단한 방정식

방정식 (equation): 두 식이 같다고 표현한 식 $2x + 5 = 9$, $\frac{2x - 1}{x + 2} = 10$, $x^2 + 1 = 0$

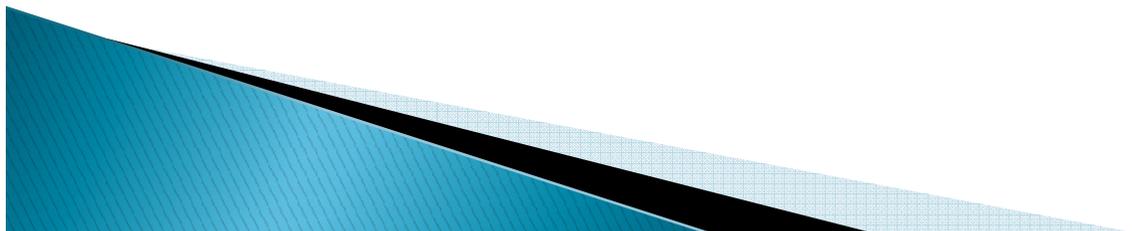
해 (solution) 또는 근 (root): 주어진 방정식을 만족시키는 미지수의 값



예제 1 다음 방정식을 풀어라.

$$(1) \frac{7x+3}{2} = \frac{9}{4}x + 4$$

$$(2) \frac{5}{x-4} = \frac{6}{x-3}$$



[풀이] (1) 양변에 4를 곱하면

$$2(7x + 3) = 9x + 16$$

이므로

$$14x + 6 = 9x + 16$$

$9x$ 는 좌변으로 6 은 우변으로 이항하면

$$14x - 9x = 16 - 6 \quad \text{즉} \quad 5x = 10$$

따라서 $x = 2$

(2) $(x - 4)(x - 3)$ 을 양변에 곱하면

$$5(x - 3) = 6(x - 4)$$

이므로

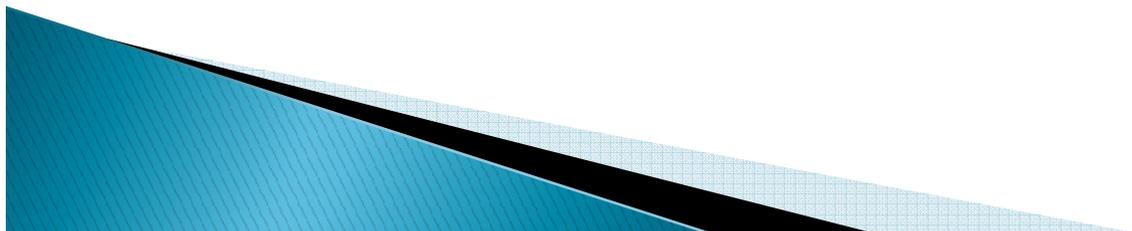
$$5x - 15 = 6x - 24$$

따라서 $x = 9$ 이다.

예제 2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $\sqrt{x^2 + 2x} - x = 4$

(2) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x} = -3$



[풀이] (1) x 를 우변으로 이항하고 양변을 제곱하여 정리하면

$$\sqrt{x^2 + 2x} = x + 4$$

$$x^2 + 2x = x^2 + 8x + 16$$

$$6x = -16$$

따라서 $x = -\frac{8}{3}$

(2) \sqrt{x} 를 우변으로 이항하면

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{x} - 3$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x - 3 = x - 6\sqrt{x} + 9$$

$$6\sqrt{x} = 12$$

$$\sqrt{x} = 2 \quad \text{즉} \quad x = 4$$

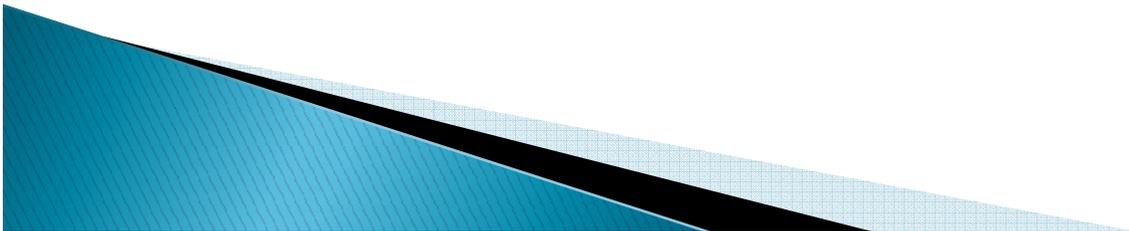
그러나 $x = 4$ 를 주어진 방정식에 대입하면 성립하지 않는다. 따라서 근이 없다. ... ○

예제 3 다음 방정식을 풀어라.

(1) $|3x - 1| = 5$ \longrightarrow $x < \frac{1}{3}$ or $x \geq \frac{1}{3}$

(2) $|x - 1| - |2x - 4| = -3$

$x < 1$ or $1 \leq x < 2$ or $2 \leq x$



[풀이] (1) $3x - 1 = 5$ 또는 $3x - 1 = -5$ 이므로 $x = 2$ 또는 $x = -\frac{4}{3}$

(2) (i) $x < 1$ 일 때

$$-(x-1) + (2x-4) = -3$$

이므로 $x - 3 = -3$ 따라서 $x = 0$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때

$$(x-1) + (2x-4) = -3$$

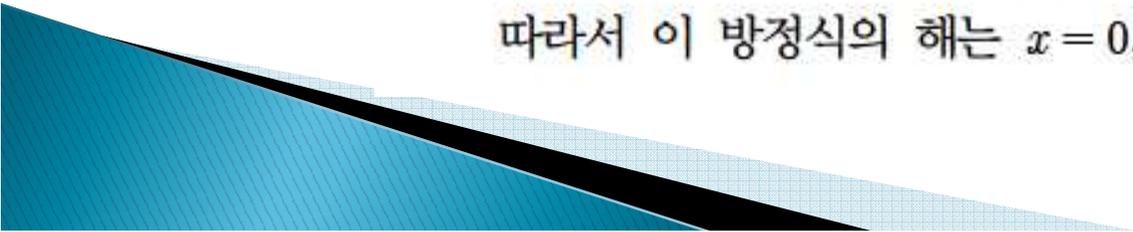
이므로 $3x - 5 = -3$ 즉 $x = \frac{2}{3}$. 따라서 해가 없다.

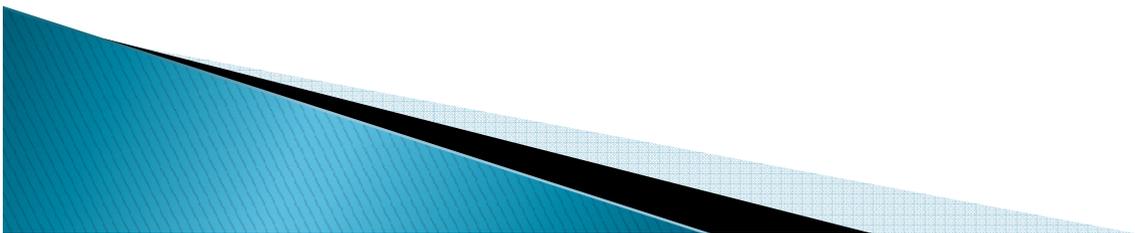
(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$(x-1) - (2x-4) = -3$$

이므로 $-x + 3 = -3$ 따라서 $x = 6$

따라서 이 방정식의 해는 $x = 0, 6$ 이다.





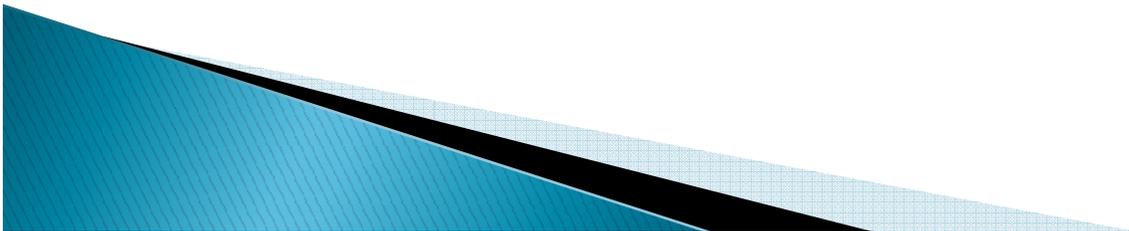
3.2 이차방정식

a, b, c 가 상수이고 $a \neq 0$ 일 때

$$ax^2 + bx + c = 0$$

꼴의 식을 이차방정식(quadratic equation)이라 한다.

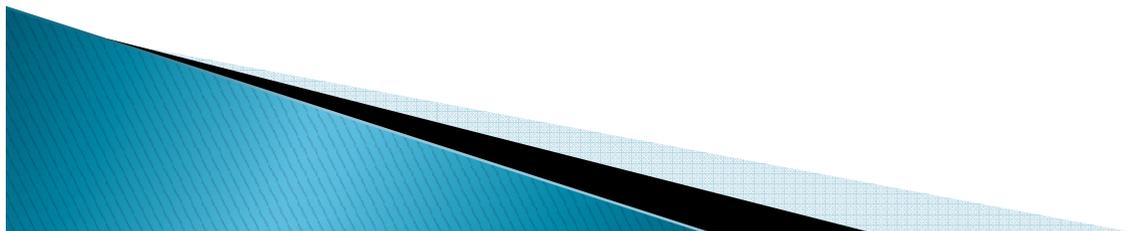
해는 복소수 범위 내에 존재 : 실근 또는 허근



예제 1 — 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2 - x - 2 = 0$

(2) $x^2 + 2 = 0$



[풀이] (1) $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x+1=0 \text{ 또는 } x-2=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

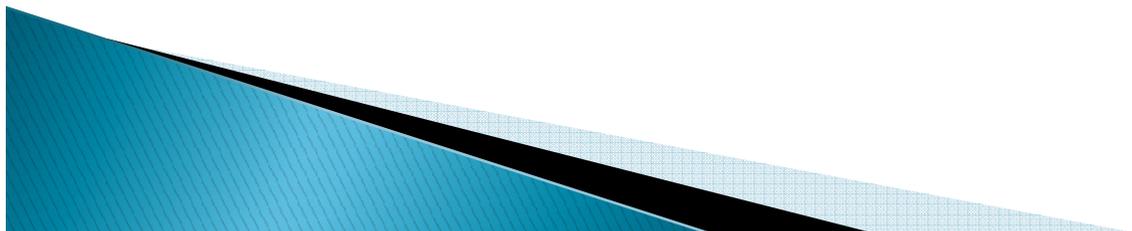
(2) $x^2 + 2 = 0$ 에서 좌변을 인수분해하면

$$x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = 0$$

$$x - \sqrt{2}i = 0 \text{ 또는 } x + \sqrt{2}i = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}i \text{ 또는 } x = -\sqrt{2}i$$



이차방정식의 근의 공식(1)

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

인수분해가 쉽지 않을 때

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \pm \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

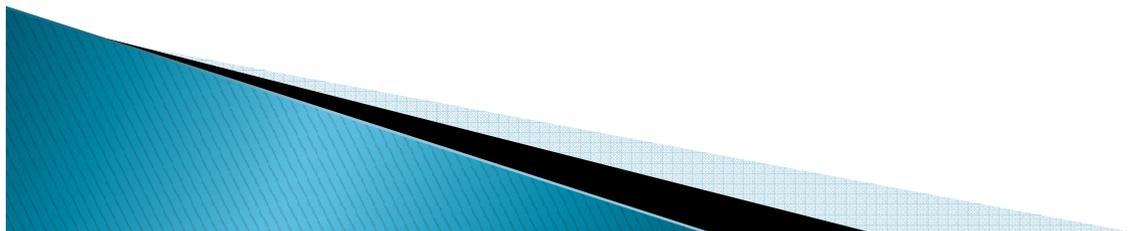
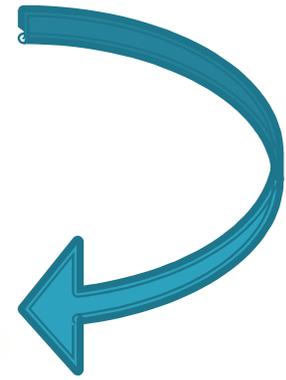
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

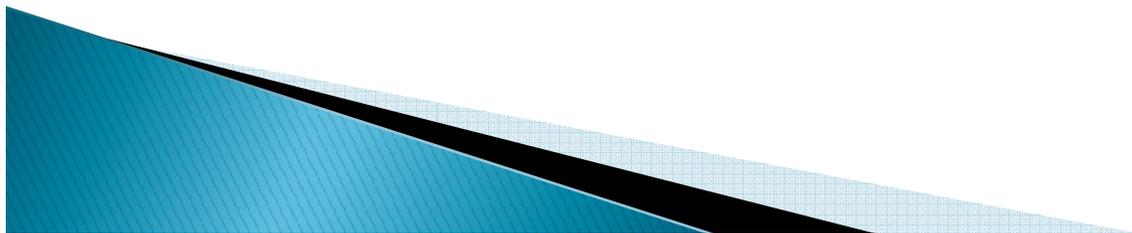
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



예제 2 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $3x^2 + x - 2 = 0$

(2) $x^2 - 2x + 3 = 0$



[풀이] (1) 근의 공식에서 $a = 3, b = 1, c = -2$ 이므로

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = -1$$

(2) 근의 공식에서 $a = 1, b = -2, c = 3$ 이므로

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

