2.3 유리식과 무리식

유리식 : 다항식 A,B에 대하여 B ≠ 0일 때, A/B꼴로 나타내어 질 수 있는 식.

분수식: 분모 B가 상수가 아닌 유리식 A/B꼴로 나타내어 지는 식

(분모 B가 상수이면 유리식 A/B는 다항식)

(1) $\frac{A}{B}$가 유리식이고 C가 0이 아닌 다항식일 때

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C},\ \frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$$

(2) $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\ \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$

(3) $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\ \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$

2.3 유리식과 무리식

분수식 약분하기 : 분수식의 분자, 분모에 공약수가 있을 때, 이 공약수로

분자, 분모를 나누어 간단히 한다.

기약분수식 : 분수식에서 분자와 분모를 그들의 최대 공약수로 나누어 주면

분자와 분모가 서로소가 되는 분수식.

예제 1 다음 유리식을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}$

(2) $\dfrac{x+1+\dfrac{1}{x-1}}{x-1-\dfrac{1}{x-1}}$

(3) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

(4) $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

[풀이] (1) $\frac{x}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}+\frac{4x}{(x-2)(x+2)}$

$$=\frac{x(x-2+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x}{x-2}$$

(2) $\dfrac{x+1+\dfrac{1}{x-1}}{x-1-\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{x^2}{x-1}}{\dfrac{x^2-2x}{x-1}}$

$$=\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x^2-2x}{x-1}$$

$$=\frac{x^2}{x-1}\times\frac{x-1}{x(x-2)}$$

$$=\frac{x}{x-2}$$

(3) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}$

$$=1+\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{x+1+x}{x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{x+1}$$

(4) $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\dfrac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$

$$=\frac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{\dfrac{h}{1}}$$

$$=\frac{-1}{x(x+h)}$$

이중근호 : 근호 안에 근호가 들어 있는 것 $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$

밖의 근호 없앨 수 있구나

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{2+3+2\sqrt{2\times3}} \\
&= \sqrt{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{2}+\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

양수 a, b에 대하여

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$$

이 성립하므로 다음 결과를 얻는다.

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$일 때, $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

예제 2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ (2) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$a>0,\ b>0$일 때, $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$일 때, $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

[풀이] (1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}}$

$$= \sqrt{4+3-2\sqrt{4\times 3}}$$

$$= \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

(2) $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{5+1-2\sqrt{5\times 1}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

무리식 – 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식.

$$\sqrt{x-1},\ x-\sqrt{x^2+1},\ \frac{1}{\sqrt{x+1}},\ \frac{x-2}{\sqrt{x}}$$

- 식의 값이 실수가 되도록 문자의 값 범위 제한.

→ 근호 안의 값이 0 또는 양수가 되도록 제한

$$x+\sqrt{1-2x}$$

$$1-2x \geq 0.$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

예제 3 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x의 값의 범위를 정하여라.

(1) $2+\sqrt{3x-2}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

[풀이] (1) $3x-2\geq 0$이어야 하므로 $x\geq \frac{2}{3}$

(2) 먼저 $1+x\geq 0$, $1-x\geq 0$이어야 하므로 $-1\leq x\leq 1$. 그런데 분모에 있는 $\sqrt{1+x}$와 $\sqrt{1-x}$가 동시에 0일 수 없으므로 구하는 x의 값의 범위는 $-1\leq x\leq 1$. …○

예제 4 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$을 간단히 하여라.

(2) $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$일 때, $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$의 값을 구하여라.

x를 먼저 간단히 한다. 그리고 간단히 한다.

[풀이] (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$

$$=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$$

$$=\frac{2\sqrt{x+2}}{(x+2)-x}=\sqrt{x+2}$$

(2) $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$이므로 $\sqrt{x}=\sqrt{2}+1$이다. 따라서

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}+\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4(2+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$=2(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

$$=2\sqrt{2}$$

$\cdots$ ○

방정식과 부등식 3

3.1 간단한 방정식

방정식 (equation): 두 식이 같다고 표현한 식 $2x+5=9,\ \frac{2x-1}{x+2}=10,\ x^2+1=0$

해 (solution) 또는 근 (root) : 주어진 방정식을 만족시키는 미지수의 값

예제 1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $\dfrac{7x+3}{2}=\dfrac{9}{4}x+4$

(2) $\dfrac{5}{x-4}=\dfrac{6}{x-3}$

[풀이] (1) 양변에 4를 곱하면

$$2(7x+3)=9x+16$$

이므로

$$14x+6=9x+16$$

$9x$는 좌변으로 6은 우변으로 이항하면

$$14x-9x=16-6 \text{ 즉 } 5x=10$$

따라서 $x=2$

(2) $(x-4)(x-3)$을 양변에 곱하면

$$5(x-3)=6(x-4)$$

이므로

$$5x-15=6x-24$$

따라서 $x=9$이다.

예제 2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $\sqrt{x^2+2x}-x=4$ (2) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=-3$

[풀이] (1) x를 우변으로 이항하고 양변을 제곱하여 정리하면

$$\sqrt{x^2+2x}=x+4$$

$$x^2+2x=x^2+8x+16$$

$$6x=-16$$

따라서 $x=-\dfrac{8}{3}$

(2) $\sqrt{x}$를 우변으로 이항하면

$$\sqrt{x-3}=\sqrt{x}-3$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x-3=x-6\sqrt{x}+9$$

$$6\sqrt{x}=12$$

$$\sqrt{x}=2 \text{ 즉 } x=4$$

그러나 $x=4$를 주어진 방정식에 대입하면 성립하지 않는다. 따라서 근이 없다. …ㅇ

예제 3 다음 방정식을 풀어라.

(1) $|3x-1|=5$ $\longrightarrow$ $x < ⅓$ or $x \geq ⅓$

(2) $|x-1|-|2x-4|=-3$

$x < 1$ or $1 \leq x < 2$ or $2 \leq x$

[풀이] (1) $3x-1=5$ 또는 $3x-1=-5$이므로 $x=2$ 또는 $x=-\dfrac{4}{3}$

(2) (i) $x<1$일 때

$$-(x-1)+(2x-4)=-3$$

이므로 $x-3=-3$ 따라서 $x=0$

(ii) $1\leq x<2$일 때

$$(x-1)+(2x-4)=-3$$

이므로 $3x-5=-3$ 즉 $x=\dfrac{2}{3}$. 따라서 해가 없다.

(iii) $x\geq 2$일 때

$$(x-1)-(2x-4)=-3$$

이므로 $-x+3=-3$ 따라서 $x=6$

따라서 이 방정식의 해는 $x=0, 6$이다.

3.2 이차방정식

a, b, c가 상수이고 $a \neq 0$일 때

$$ax^2 + bx + c = 0$$

꼴의 식을 **이차방정식**(quadratic equation)이라 한다.

해는 복소수 범위 내에 존재 : 실근 또는 허근

예제 1 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2 - x - 2 = 0$ (2) $x^2 + 2 = 0$

[풀이] (1) $x^2-x-2=0$에서 좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$x+1=0 \text{ 또는 } x-2=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

(2) $x^2+2=0$에서 좌변을 인수분해하면

$$x^2-(\sqrt{2}i)^2=0$$

$$(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)=0$$

$$x-\sqrt{2}i=0 \text{ 또는 } x+\sqrt{2}i=0$$

$$\therefore x=\sqrt{2}i \text{ 또는 } x=-\sqrt{2}i$$

이차방정식의 근의 공식(1)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

인수분해가 쉽지 않을 때

$$x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=5$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=5$$

$$\Leftrightarrow x+1=\pm\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

예제 2 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $3x^2 + x - 2 = 0$　　(2) $x^2 - 2x + 3 = 0$

[풀이] (1) 근의 공식에서 $a=3,\ b=1,\ c=-2$이므로

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3}=\frac{-1\pm5}{6}$$

$$\therefore x=\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=-1$$

(2) 근의 공식에서 $a=1,\ b=-2,\ c=3$이므로

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{2}$$

$$\therefore x=1\pm\sqrt{2}i$$