복잡한 식 인수분해 할 때~

1. 공통인수 있을 경우 → <u>공통인수</u>로 묶는다
2. 적당한 항끼리 짝짓는다 → <u>공통인수</u>가 생기도록 한다
3. 공통인수 또는 식 일부분 → <u>한 문자로 치환</u>
4. 차수가 낮은 문자에 관하여 <u>내림차순</u>으로 정리

예제 3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $\underline{\underline{x^4}} - 8\underline{\underline{x^2}} - 9$

(2) $\underline{\underline{a^2}} + \underline{\underline{bc}} - \underline{\underline{ca}} - \underline{\underline{b^2}}$

(3) $2x^2 - xy - \underline{\underline{y^2}} - 4x + \underline{\underline{y}} + 2$

(4) $\underline{\underline{x^4}} - 6\underline{\underline{x^2y^2}} + \underline{\underline{y^4}}$

치환

내림차순

공통인수

공통인수

[풀이] (1) $x^2 = X$로 놓고 인수분해하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = X^2 - 8X - 9 = (X+1)(X-9)$$

위의 식에서 $X = x^2$을 대입하여 정리하면

$$(X+1)(X-9) = (x^2+1)(x^2-9) = (x^2+1)(x+3)(x-3)$$

$$\therefore x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2+1)(x+3)(x-3)$$

(2) 주어진 식을 c에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} a^2 + bc - ca - b^2 &= c(b-a) + a^2 - b^2 \\ &= -c(a-b) + (a-b)(a+b) \\ &= (a-b)(a+b-c) \end{aligned}$$

(3) 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$
\begin{aligned}
2x^2-xy-y^2-4x+y+2 &= 2x^2-(y+4)x-(y^2-y-2) \\
&= 2x^2-(y+4)x-(y-2)(y+1) \\
&= [2x+(y-2)][x-(y+1)] \\
&= (2x+y-2)(x-y-1)
\end{aligned}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
x^4-6x^2y^2+y^4 &= x^4-2x^2y^2+y^4-4x^2y^2 \\
&= (x^2-y^2)^2-(2xy)^2 \\
&= (x^2-y^2+2xy)(x^2-y^2-2xy) \qquad \cdots ○
\end{aligned}
$$

2.2 나머지 정리와 고차식의 인수분해

방정식(equation) : 등식 $2x + 4 = 0$과 같이 문자에 특정한 값을 대입 했을 때에만 참이 되는 등식.

항등식 : 등식 $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$과 같이 문자에 어떤 값을 대입해도 **항상 참**이 되는 등식

예제 1 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이 되기 위한 필요충분조건을 구하여라.

x에 어떤 값을 넣어도 성립!

예제 1 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이 되기 위한 필요충분조건을 구하여라.

[풀이] $ax^2+bx+c=0$이 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하여도 성립하므로 x에 0, 1, -1을 대입할 때도 성립한다.

$x=0$을 대입하면 $c=0$ … ①

$x=1$을 대입하면 $a+b+c=0$ … ②

$x=-1$을 대입하면 $a-b+c=0$ … ③

①, ②, ③에서 $a=0$, $b=0$, $c=0$

역으로 $a=b=c=0$이면 모든 x의 값에 대하여

$ax^2+bx+c=0$이다.

$\therefore a=b=c=0$ … 답

예제 2 등식 $\underline{3x^2}+\underline{2x}+1=\underline{a(x+1)^2+b(x+1)+c}$가 x에 관한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하여라.

미정계수법 – 항등식의 성질을 이용해서 알지 못하는 계수의 값을 정하는 방법

1. x에 관한 내림차순 정리
2. 항등식

예제 2 등식 $3x^2+2x+1=a(x+1)^2+b(x+1)+c$가 x에 관한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하여라.

[풀이] 등식의 우변을 x에 관한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} 3x^2+2x+1 &= a(x+1)^2+b(x+1)+c \\ &= ax^2+(2a+b)x+(a+b+c) \end{aligned}$$

이 때, 주어진 식이 항등식이어야 하므로

$$a=3 \quad \cdots ①$$

$$2a+b=2 \quad \cdots ②$$

$$a+b+c=1 \quad \cdots ③$$

①을 ②에 대입하여 풀면

$$b=-4 \quad \cdots ④$$

①과 ④를 ③에 대입하여 풀면 $c=2$

$\therefore a=3,\ b=-4,\ c=2$ …답

$$2x^2 + 5x + 6 = (x+2)(2x+1) + \underline{4}$$

나머지

I. $A=2x^2+5x+6$, $B=x+2$일 때, A를 B로 나누는 계산

$$
\begin{array}{lrl}
 & 2x+1 & \\
B\cdots\quad x+2 & \overline{)\,2x^2+5x+6} & \cdots A \\
 & 2x^2+4x & \cdots B\times 2x \\
\hline
 & x+6 & \cdots A-B\times 2x \\
 & x+2 & \cdots B\times 1 \\
\hline
 & 4 & \cdots A-B\times 2x-B\times 1
\end{array}
$$

위 식으로부터 $4=A-B\times 2x-B\times 1$

이것을 A에 관하여 풀면 $A=B\times(2x+1)+4$

$$\therefore\ 2x^2+5x+6=(x+2)(2x+1)+4$$

일반적으로 다항식 $a(x)$를 그보다 차수가 낮은 다항식 $b(x)$로 나누면

$$a(x)=b(x)\underbrace{q(x)}_{\text{몫}}+\underbrace{r(x)}_{\text{나머지}}$$

차수 : a(x) > b(x) > r(x)

II.

계수들만 아래와 같이 나열해 보면 몫과 나머지를 쉽게 구할 수 있다.

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 2 & 5 & 6 \\
 & & -4 & -2 \\
\hline
 & 2 & 1 & 4
\end{array}
$$

몫 : $2x+1$ 나머지 : 4

계수들만 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**

III.

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지

일차식으로 나누었으므로 나머지는 상수 r이다. 몫을 $q(x)$라 하면

$$f(x)=(x-a)q(x)+r$$

양변에 $x=a$를 대입하면

$$f(a)=r$$

$f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$

나머지 정리
다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$이다.

나머지가 0이라는 것과 나누어떨어진다는 것은 같은 의미이므로 다음 정리가 성립한다.

인수정리
다항식 $f(x)$가 $x-a$로 나누어 떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(a)=0$이다.

예제 3 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

나머지는 1차식 이하 → ax+b

f(1) = 2

f(2) = 1

[풀이] 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눌 때의 몫을 $q(x)$라 하고, $f(x)$가 이차식으로 나누어지므로 나머지를 일차식 $ax+b$라고 두면

$$f(x)=(x-1)(x-2)q(x)+ax+b$$

나머지정리에 의하여 $f(1)=2$, $f(2)=1$이므로

$$a+b=2 \quad \cdots ①$$

$$2a+b=1 \quad \cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $\therefore a=-1,\ b=3$

따라서 구하는 나머지는 $-x+3$이다. …o

예제 4 다항식 x^3+5x^2+kx-k가 일차식 $x+1$로 나누어떨어지도록 상수 k의 값을 정하여라.

$f(-1) = 0$

[풀이] $f(x)=x^3+5x^2+kx-k$라고 할 때, $f(x)$가 $x+1$로 나누어 떨어지면 인수정리에 의해서 $f(-1)=0$이 된다. 즉,

$$f(-1)=-1+5-k-k=0$$

$\therefore\ k=2$ …❶