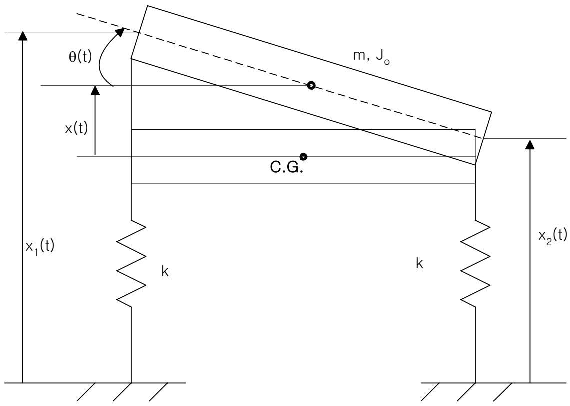
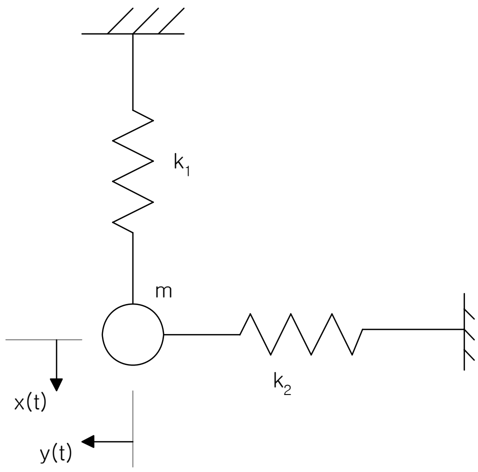
제 5 장　2 자유도계

5.1 서 론

계의 자유도 = 계의 질량수 x 각 질량이 가능한 운동 형태 수

2 자유도계





정규 모드 (주 모드 또는 고유 모드)

- 자유진동 시 하나의 고유진동수에서 발생하는 진폭비

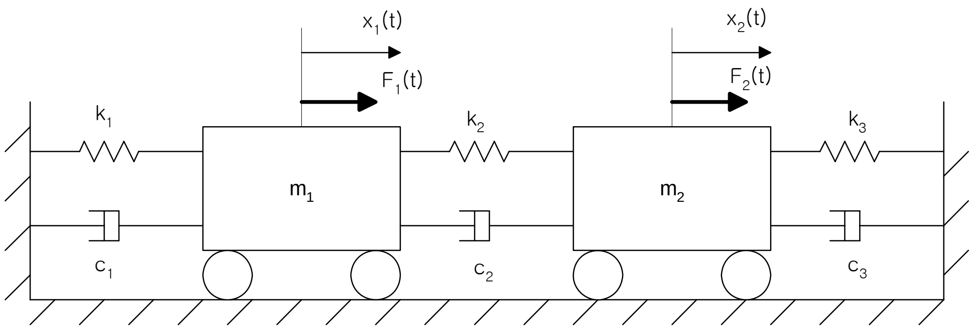
o 2 자유도계

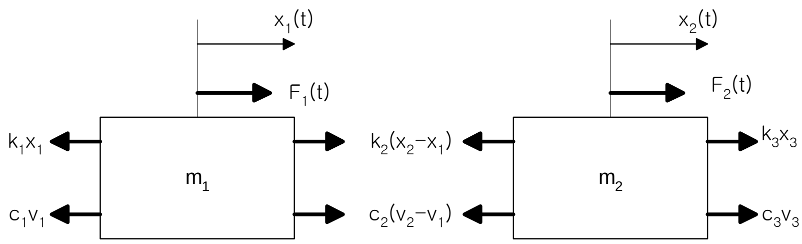
- 2개의 운동방정식
- 2개의 고유진동수
- 2개의 정규모우드(normal mode)

o 일반좌표계 (generalized coordinates)

o 주 좌표계(principal coordinates)

5.2 강제 진동의 운동방정식





$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_2$$

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_1 + k_2)x_2 = F_2 \qquad (1)$$

$\Leftarrow$ System of two coupled differential equations

Matrix form :

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{F\}$$

$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad \text{diagonal}$$

$$[c]=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad \text{symmetric}$$

$$[k]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad \text{symmetric}$$

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

5-3. 비감쇠계의 자유진동 해석

식 (1)에서 $F_1=F_2=0$, $c_1=c_2=c_3=0$ 이므로

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+(k_1+k_2)x_2=0 \end{aligned} \qquad (2)$$

조화운동을 가정하고 m_1과 m_2가 동일 진동수 ω 와 위상각 ϕ를 갖는다면 ,

$$\begin{aligned} x_1(t)=X_1\cos(\omega t+\phi) \\ x_2(t)=X_2\cos(\omega t+\phi) \end{aligned}$$

을 식 (2) 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \left\{\left[-m_1\omega^2+(k_1+k_2)\right]X_1-k_2X_2\right\}\cos(\omega t+\phi)=0 \\ \left\{-k_2X_1+\left[-m_2\omega^2+(k_2+k_3)\right]X_2\right\}\cos(\omega t+\phi)=0 \end{aligned}$$

이므로 결국

$$\left[-m_1\omega^2+(k_1+k_2)\right]X_1-k_2X_2=0$$
$$-k_2X_1+\left[-m_2\omega^2+(k_2+k_3)\right]X_2=0$$

$X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$ 이므로

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2+(k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+(k_2+k_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=0$$

를 만족하는 해의 조건은

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2+(k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+(k_2+k_3) \end{vmatrix}=0$$

이다. 이는 결국

$$m_1m_2\omega^4-\left[(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1\right]\omega^2+\left[(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2\right]=0$$

$\Leftarrow$ Characteristic Equation

$$\omega_1^2, \omega_2^2=\frac{1}{2}\left[\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1m_2}\right] \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1m_2}\right]^2-4\left[\frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1m_2}\right]}$$

ω_1 , $\omega_2 \Leftarrow$ 고유진동수 (Natural Frequencies)

a) $\omega=\omega_1$

$$\left[-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)\right]X_1^{(1)}-k_2X_2^{(1)}=0$$
$$-k_2X_1^{(1)}+\left[-m_2\omega_1^2+(k_2+k_3)\right]X_2^{(1)}=0$$

$$r_1=\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)}{k_2}=\frac{k_2}{-m_2\omega_1^2+(k_2+k_3)}$$

b) $\omega = \omega_2$

$$\left[-m_1\omega_2^2 + (k_1+k_2)\right]X_1^{(2)} - k_2X_2^{(2)} = 0$$
$$-k_2X_1^{(2)} + \left[-m_2\omega_2^2 + (k_2+k_3)\right]X_2^{(2)} = 0$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1+k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2+k_3)}$$

ω_1과 ω_2에 대응하는 고유 모드

$$\tilde{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1X_1^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2X_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$

해

1차 모드

$$\tilde{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix}$$

2차모드

$$\tilde{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_1X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

초기조건

$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20}$: 변위 조건
$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10},\ \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$: 속도 조건

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}^1(t) + \tilde{x}^2(t)$$

즉,

$$x_1(t) = X_1^{(1)}\cos(\omega_1 + \phi_1) + X_1^{(2)}\cos(\omega_2 + \phi_2)$$
$$x_2(t) = r_1 X_1^{(1)}\cos(\omega_1 + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)}\cos(\omega_2 + \phi_2)$$

에 초기조건을 대입하여 구하면

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{(r_2 x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(-r_2 \dot{x}_{10} + \dot{x}_{20})^2}{\omega_1^2}}$$

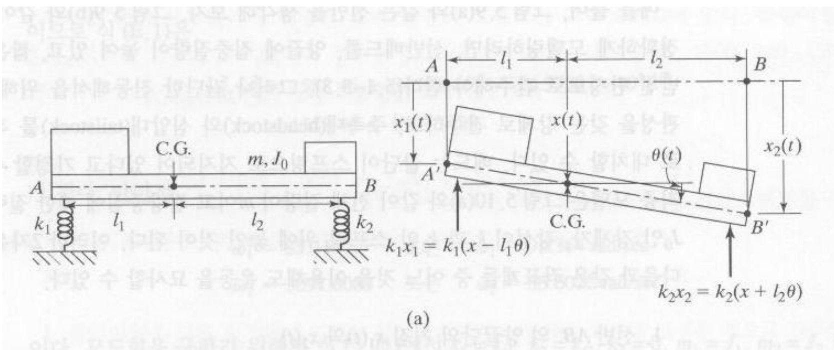
$$X_1^{(2)} = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{(-r_1 x_{10} + x_{20})^2 + \frac{(r_1 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20})^2}{\omega_2^2}}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{-r_2 \dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{\omega_1 (r_2 x_{10} - x_{20})}\right\}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{r_1 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}{\omega_2 (-r_1 x_{10} + x_{20})}\right\}$$

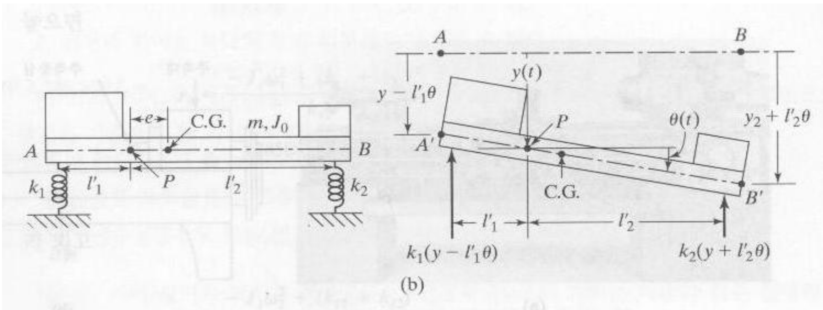
5-4. 좌표의 연성과 주좌표계

1) 탄성연성 (정적연성)



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 l_1 + k_2 l_2 \\ -k_1 l_1 + k_2 l_2 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2) 동적연성 (관성연성)



$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_p \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 l'_1 + k_2 l'_2 \\ -k_1 l'_1 + k_2 l'_2 & k_1 l'^2_1 + k_2 l'^2_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3) 좌표계의 설정과 관계없이 계는 자신의 고유특성으로 진동한다. 즉, 좌표계는 편리하게 선택할 수 있다. 선정된 연성되지 않게 좌표계를 주좌표계 또는 고유좌표계라 한다.

5-5. 강제 진동 해석

일반적인 외력을 받는 2자유도의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

조화 외력 $F_j = F_{jo} e^{i\omega t} \quad (j = 1,2)$

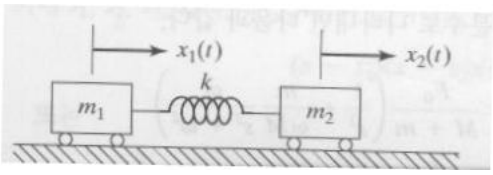
정상상태 해 $x_j(t) = X_j e^{i\omega t}$ $(j = 1,2)$를 대입하여 정리하면

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_{11}+i\omega c_{11}+k_{11} & -\omega^2 m_{12}+i\omega c_{12}+k_{12} \\ -\omega^2 m_{12}+i\omega c_{12}+k_{12} & -\omega^2 m_{22}+i\omega c_{22}+k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

임피던스 $Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$

$$[Z]\widetilde{X} = \widetilde{F}_0$$

5-6. 반한정계



운동 방정식

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

자유진동의 조화운동 가정하여 $x_j(t) = X_j\cos(\omega t + \phi)$ 대입하면

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k & -k \\ -k & -m_2\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k & -k \\ -k & -m_2\omega^2 + k) \end{vmatrix} = 0$$

고유진동수는

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

Lagrange 방정식

다자유도의 운동방정식 유도에 유용

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

T : 운동에너지
V : 위치에너지 (탄성에너지)
R : Rayleigh 소멸함수

q_j: 일반좌표계에서 변위

ex)

$q_j = x_j$ 인 경우

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{x}}^T [m] \tilde{\dot{x}}$$

$$V = \frac{1}{2}\tilde{x}^T [k] \tilde{x}$$

$$R = \frac{1}{2}\tilde{\dot{x}}^T [c] \tilde{\dot{x}}$$