제 **10** 장 일변수함수의 극대 극소

제 10 장 일변수함수의 극대 극소

이윤을 최대화한다든가 또는 비용을 최소화한다든가 하는 문제는 총괄하여 최적화 문제(optimization problem)라고 통칭하곤 한다. 최적화 문제는 목적함수와 제약조건으로 구성되어 있으며, 의사결정변수의 값에 따라 최적화하고자 하는 목적함수의 값이 결정된다. 본장에서는 이 중 의사결정변수의 수가 하나이며 제약조건이 존재하지 않는 목적함수의 극대·극소에 대해서만 살펴본다.

제 1 절 함수의 극대와 극소

1 극값의 정의

- 임의의 함수 $y = f(x)$가 주어져 있을 때 $f(x)$가 정의될 수 있는 모든 x값에 대해 $f(x) \leq f(x^*)$가 성립한다면 $f(x^*)$는 f의 최대값(global maximum)이라 하며, 이와 반대로 $f(x) \geq f(x^*)$가 성립한다면 $f(x^*)$는 f의 최소값(global minimum)이라 부름

- 이에 반해 함수 f의 극대값(relative maximum)이란 $x^* - \delta \leq x \leq x^* + \delta$ 안의 모든 x값에 대해

$$f(x) \leq f(x^*)$$

- 함수 f의 극소값(relative minimum)이란 $x^* - \delta \le x \le x^* + \delta$ 안의 모든 x값에 대해 $f(x) \ge f(x^*)$가 성립하는 양수 δ가 존재할 때의 $f(x^*)$값을 의미

- 극대값과 극소값을 총괄하여 극값(extremum value)이라 부르며, 극값을 도출하는 $(x^*,\ f(x^*))$를 임계점(critical point)이라 함

$f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=x^*$에서 $f'(x^*)=0$을 만족시킨다고 가정하자.

(a) 도함수 $f'(x)$가 x^*의 바로 왼쪽에서는 양의 값(+)을 갖고 x^*의 바로 오른쪽에서는 음의 값(−)을 갖는다면 $f(x^*)$는 극대값이다.

(b) 도함수 $f'(x)$가 x^*의 바로 왼쪽에서는 음의 값(−)을 갖고 x^*의 바로 오른쪽에서 양의 값(+)을 갖는다면 $f(x^*)$는 극소값이다.

(c) x^*의 양편에서 $f'(x)$가 모두 음이거나 양이면 $f(x^*)$는 극값이 될 수는 없다. 이와 같은 점 $(x^*,\ f(x^*))$를 변곡점이라 한다.

2 이차 및 고차 도함수를 이용한 극값 판정

- 2차도함수는 도함수 $f'(x)$의 도함수로서 $f''(x)$ 또는 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$으로 표기

  $\dfrac{d^2y}{dx^2}$은 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$를 간략히 줄인 것임

- n차 도함수

$$f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x),\ \cdots\cdots,\ f^{(n)}(x)$$

또는

$$\frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \cdots\cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

함수 f의 1차도함수 $f'(x)$가 $x = x^*$에서 $f'(x^*) = 0$ 을 만족시킬 때

(a) 만약 $f''(x^*) < 0$ 이면 $f(x^*)$는 극대값이며

(b) 만약 $f''(x^*) > 0$ 이면 $f(x^*)$는 극소값이다.

$f'(x^*) = 0$은 x^*가 극값이기 위한 필요조건(necessary condition)이 되며 $f''(x^*) < 0$, $f''(x^*) > 0$ 라는 조건이 추가된다면 이는 곧 $f(x^*)$가 극대값(극소값)이기 위한 충분조건(sufficient condition)이 됨

일반적으로 $f'(x^*) = 0$ 이라는 필요조건은 극값이기 위한 1차조건(first-order condition)이라 하며 2차도함수에 기초한 충분조건은 2차조건(second-order condition)이라 함

고차도함수를 이용한 극값 판정

$f(x)$가 n번 미분이 가능하다고 할 때 $f'(x^*) = f''(x^*) = \cdots\cdots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$이고, $f^{(n)}(x^*) \neq 0$이 성립한다고 하자.

(a) n이 짝수이고 $f^{(n)}(x^*) < 0$이면 $f(x^*)$는 극대값이며,

(b) n이 짝수이고 $f^{(n)}(x^*) > 0$이면 $f(x^*)$는 극소값이다.

(c) 그러나 n이 홀수이면 $f(x^*)$는 극값이 될 수 없다.

예제 8.2

다음 함수의 극값을 구하여라.

(a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$ (b) $g(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$

풀이

(a) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족하는 x 값은 $x = 0$ 과 $x = 1$ 뿐이다. 한편 $f''(x) = 36x^2 - 24x$ 이므로 $f''(0) = 0$, $f''(1) = 12$ 임을 알 수 있다. 따라서 $f(1) = -2$ 는 극소값임을 알 수 있으나 $f(0)$이 극값인지를 판정하기 위해서는 $f'''(0)$을 구해야 한다. $f'''(0) = (72)(0) - 24 = -24$ 인데 앞에서 설명한 정리에 의하면 $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ 일 때의 n이 홀수이면 $f(x^*)$가 극값이 될 수 없으므로 $f(0)$은 극값일 수 없다.

(b) $g'(x) = 1 + 8x^{-3}$ 에서 $g'(x) = 0$을 만족하는 x의 값은 -2 뿐이다. 한편 $g''(x) = -24x^{-4}$ 로 $g''(-2) < 0$ 임을 알 수 있으므로 $g(-2) = -3$ 은 극대값이 된다.

제 2 절 최대값과 최소값의 판정

정리

함수 f가 폐구간 $[a,\ b]$에서 정의되며, 이 구간에서 연속함수일 때 f는 최대값과 최소값을 가진다. 또한 f의 최대값과 최소값은 폐구간의 양쪽 끝점인 a와 b에서의 f값과 $f'(x^*)=0$일 때의 $f(x^*)$값을 계산함으로써 구할 수 있다.

예제 8.4

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$이 $[0,\ 2]$의 정의구역을 가진다고 할 때 최대값과 최소값을 구하여라.

풀이

먼저 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1) = 0$에서 정의구역 안에 포함되는 점은 $x = 1$일 때뿐이다.

$f(1) = -6$, $f(0) = 1$, $f(2) = 5$이므로, 최대값은 5, 최소값은 -6임을 알 수 있다.

예제 8.5

다음 함수의 최대값을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (-2 \le x < 1) \\ 3x - 2 & (1 \le x \le 3) \end{cases}$$

풀이

먼저 첫 번째 구간을 [-2, 1]로 보고 이 구간 안에서의 최대값과 최소값을 구해보기로 하자. $f'(x) = 2x = 0$인 x의 값은 0뿐이므로, 최대값이 될 수 있는 함수값은 $f(0) = 0$, $f(-2) = 4$, $f(1) = 1$ 중의 하나이다.

한편 두 번째 구간 [1, 3]에서는 $f'(x) = 3$으로 $f'(x) = 0$를 만족시키는 x의 값이 없으므로 최대값이 될 수 있는 후보는 $f(1) = 3 - 2 = 1$, $f(3) = 9 - 2 = 7$뿐이다.

이를 모두 종합해보면 [그림 9-5]에서 확인할 수 있듯이 $f(x)$의 최대값은 $f(3) = 7$이 된다.

예제 8.9

한국슈퍼퍼브리싱은 저자에게 15% 인세를 지불한다. 이번에 새로 출간한 아동용 도서의 수요는 $x = 200 - 5p$ 로 추정하고 있다. 한편 출판사가 생각하고 있는 생산비용은 $C = 10 + 2x + x^2$ 이다. 출판사와 저자입장에서 각각 이익을 최대화하는 출판부수를 구하여라.

풀이

$p = 40 - 0.2x$ 이므로 저자의 입장에서 수입은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y(x) &= (0.15)p \cdot x = (0.15)(40 - 0.2x)(x) \\ &= 6x - 0.03x^2 \end{aligned}$$

$Y(x)$ 를 x 에 대해 미분하면 $Y'(x) = 6 - 0.06x = 0 \Rightarrow x_A^* = 100$부가 된다.

그렇지만 출판사 입장에서 이윤함수를 구해보면

$$\begin{aligned} \pi(x) &= px - (10 + 2x + x^2) - (6x - 0.03x^2) \\ &= (40 - 0.2x)(x) - (10 + 2x + x^2) - (6x - 0.03x^2) \\ &= 32x - 1.17x^2 - 10 \end{aligned}$$

$$\pi'(x) = 0 \Rightarrow 32 - 2.34x = 0 \Rightarrow x_B^* = \frac{32}{2.34} = 13.68\text{부} = 14\text{부}$$

제 3 절 볼록함수와 오목함수

- 두 개의 점 $p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$과 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$이 주어져 있을 때 이 두 점을 연결하는 직선(line segment)은

$$\{x \mid x = \lambda p + (1-\lambda)q,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

정의

$f(x)$의 정의역에 포함된 임의의 두 점 x_1과 x_2가 주어져 있을 때, 0과 1 사이의 λ 값에 대해 $(0 \le \lambda \le 1)$

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

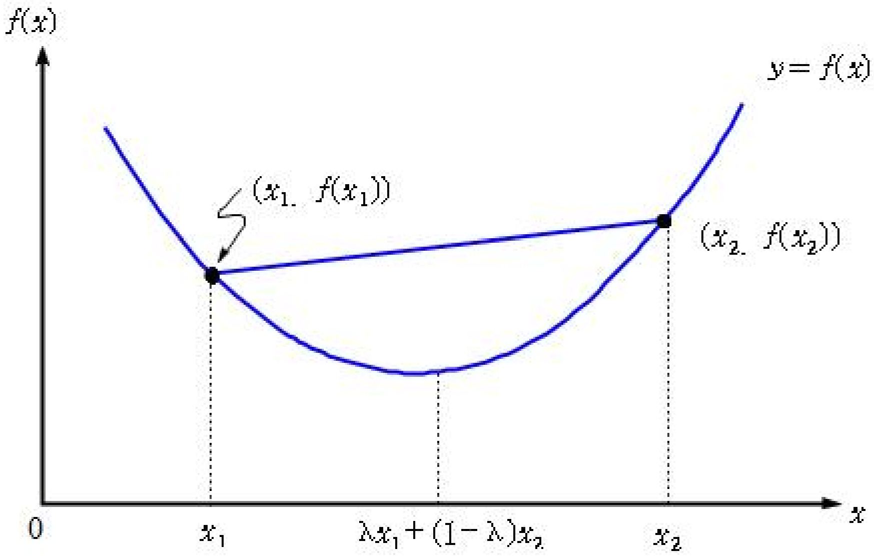
가 성립하면 $f(x)$를 볼록함수라 한다.

만약

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$는 엄격한 볼록함수(strictly convex function)라 한다.

그림 8-8



볼록함수의 예시

정의

함수 $(-1)f(x)$가 볼록함수이면 $f(x)$는 오목함수이다. 다시 말해 $f(x)$의 정의역에 포함된 임의의 두 점 x_1과 x_2가 주어져 있을 때, 0과 1 사이의 λ 값에 대해 $(0 \le \lambda \le 1)$

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$를 오목함수라 한다.

만약,

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$는 엄격한 오목함수(strictly concave function)라 한다.

다음에 주어진 각각의 함수가 볼록함수인지 오목함수인지 판정하여라.

(a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ (b) $g(x) = -3x^2 + 4x$

예제 8.14

풀이

(a) $\lambda = \frac{1}{2}$일 때의 $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] - [\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)]$를 계산해 보면

$$f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) - \left[\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + 1$$

$$-\left(x_1^2 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2} + x_2^2 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \le 0$$

이므로 $f(x)$는 볼록함수이다.

(b) $g\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) - \left(\frac{1}{2}g(x_1) + \frac{1}{2}g(x_2)\right)$

$$= -\frac{3}{4}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) - \left(-\frac{3}{2}x_1^2 + 2x_1 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_2\right)$$

$$= \frac{3}{4}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \frac{3}{4}(x_1 - x_2)^2 \ge 0$$

따라서 $g(x)$는 오목함수임을 알 수 있다.

정리

함수 f의 2차 도함수가 존재할 때

(a) 정의역의 모든 x값에 대해 $f''(x) \geq 0\,(f''(x) \leq 0)$ 이 성립하면 $f(x)$는 볼록함수(오목함수)이며, $f''(x) > 0\,(f''(x) < 0)$ 이 성립하면 $f(x)$는 엄격한 볼록함수(엄격한 오목함수)이다.

(b) $f(x)$가 볼록함수(오목함수)이면 정의역의 모든 x값에 대해 $f''(x) \geq 0\,(f''(x) \leq 0)$이 성립하며, $f(x)$가 엄격한 볼록함수(엄격한 오목함수)이면 정의역의 모든 x 값에 대해 $f''(x) > 0\,(f''(x) < 0)$이 성립한다.

예제 8.15

다음 함수가 볼록함수인지 오목함수인지 구분하여라.

(a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$ (b) $g(x) = -3x^2 + 4x + 2$

(c) $k(x) = 2x + \frac{6}{x}$ (d) $h(x) = x^3 + x^2 + 1$

풀이

(a) $f'(x) = 4x - 3$, $f''(x) = 4 > 0$ 이므로 $f(x)$는 볼록함수이다.

(b) $g'(x) = -6x + 4$, $g''(x) = -6 < 0$ 에서 $g(x)$는 오목함수임을 알 수 있다.

(c) $k'(x) = 2 + (6)(-1)x^{-2}$, $k''(x) = 12x^{-3}$ 으로 x값에 따라 0보다 클 수도 있고 작을 수도 있다. 따라서 $k(x)$는 볼록함수도 오목함수도 아니다.

(d) $h'(x) = 3x^2 + 2x$, $h''(x) = 6x + 2$ 이므로 $h''(x)$는 x값에 따라 0보다 클 수도 있고 작을 수도 있다. 따라서 $h(x)$는 볼록함수도 오목함수도 아니다.

정리

(a) 볼록함수의 극소값은 그 함수의 최소값이며 오목함수의 극대값은 그 함수의 최대값이다.

(b) 엄격한 볼록함수의 극소값은 그 함수의 최소값일 뿐만 아니라 최소값을 갖게 하는 x^* 값이 단 하나뿐이며, 엄격한 오목함수의 극대값은 그 함수의 최대값일 뿐만 아니라 최대값을 갖게 하는 x^* 값이 단 하나뿐이다.

총생산비용함수가 $C(Q) = \frac{1}{30}Q^2 + 20Q + 480$ 으로 주어져 있을 때 평균생산비용을 최소화할 수 있는 생산량수준 Q^* 를 구하여라.

예제 8.16

풀이

평균생산비용함수는 $C(Q)/Q = AC(Q) = \frac{1}{30}Q + 20 + \frac{480}{Q}$ 이므로

$$AC'(Q) = \frac{1}{30} + (480)(-1)Q^{-2} = 0 \Rightarrow Q^* = 120$$

$$AC''(Q) = 960Q^{-3}$$

이 되어 $AC''(Q)$는 Q값에 관계없이 언제나 0보다 크거나 같다 ($\because\ Q > 0$). 따라서 $AC(Q)$가 볼록함수이며, 이에 따라 $Q^* = 120$ 이 평균생산비용을 최소화하는 생산량수준이라는 결론을 내릴 수 있다.