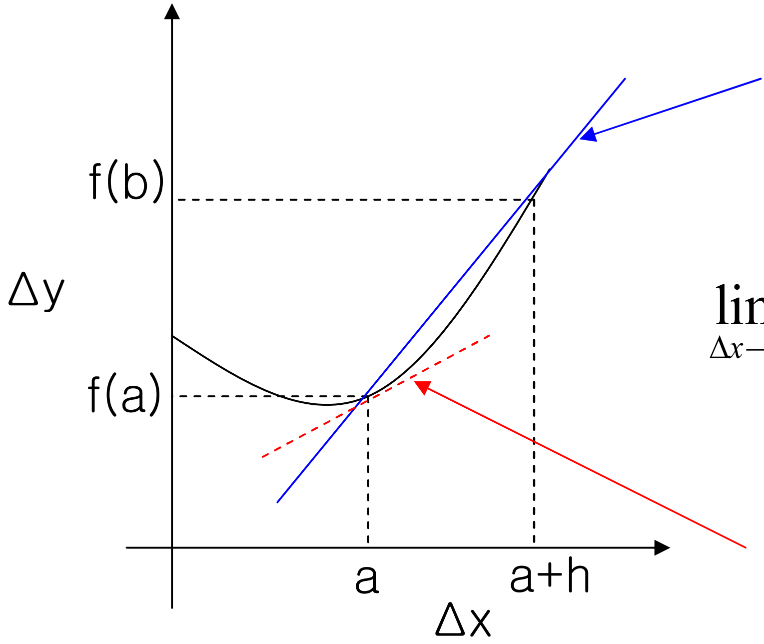
9장 함수의 미분

1. 함수의 미분

1) 미분계수, 평균변화율, 순간변화율

- 미분(Differentials)
  - 사물의 변화를 분석할 수 있는 도구(변화율)
  - 독립변수 1단위 변화에 대한 종속변수의 변화량을 측정한 것으로 독립변수의 변화량을 극소로 하였을 경우에 종속변수의 변화량이다.
  - 평균변화율=Δy/Δx=두 점을 이어주는 직선의 기울기
  - 미분계수(=순간변화율)= $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ =접선의 기울기로서 특정 변수값에서의 순간변화율
  - 도함수: 독립변수에 대응하는 순간변화율의 함수관계



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{평균변화율}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{a+h}) - f(\mathrm{a})}{(a+h) - \mathrm{a}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{a+h}) - f(\mathrm{a})}{h} \quad (\text{if} \quad a+h=x)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{a})}{x-a}$$

$$= f'(a) = \text{미분계수}$$

x=a에서의 순간변화율 또는 미분계수

<미분계수의 정의식>

y=f(x)에 대하여 x=a에서의 미분계수는

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{a}+\mathrm{h}) - f(\mathrm{a})}{h} \quad (\text{if} \quad a + h = x)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{a})}{x - a}$$

$$= f\,'(a) = \text{미분계수}$$

x=a에서의 순간변화율 또는 미분계수

예제) f(x)=$\sqrt{x}$일 때 x=2에서의 미분계수를 구하라.

<풀이>

방법1) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

방법2)

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\rhd \lim_{h\to 0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}\times k$$

$$=kf\,'(a)$$

$$\rhd \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h+h^2)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h+h^2)-f(a)}{h(1+h)}\times(1+h)$$

$$=f\,'(a)$$

예제) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(\mathrm{a})+\mathrm{f}(\mathrm{a})-f(a-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{\frac{f(a+2h)-f(\mathrm{a})}{h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\}$$

$$=f'(a)\times 2-f'(a)\times(-1)=3f'(a)$$

예제) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-\mathrm{f}(\mathrm{a})+\mathrm{f}(\mathrm{a})-f(a-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{\frac{f(a+3h)-\mathrm{f}(\mathrm{a})}{h}-\frac{f(a-2h)-\mathrm{f}(\mathrm{a})}{h}\}$$

$$=3f'(a)-(-2)f'(a)$$

$$=5f'(a)$$

정 리)

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}$$

$$=(m-n)f\,'(a)$$

$$f\,'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

예 제)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a)}{(x-a)(\mathrm{x}+\mathrm{a})}(x+a)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a)}{x^2-a}(x+a)$$

$$=f\,'(\mathrm{a})\times2\,\mathrm{a}$$

예 제)

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2 f(x)-x^2 f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^2(f(x)-\mathrm{f(a)})+\mathrm{a}^2\ f(a)-x^2 f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\{\mathrm{a}^2\ \frac{(f(x)-\mathrm{f(a)})}{x-a}-\frac{\mathrm{x}^2-a^2}{x-a}\mathrm{f(a)}\}$$

$$=\mathrm{a}^2\ f\,'(a)-2af(a)$$

2) 함수의 미분가능성

- 함수 f(x)가 연속함수이고 x=a에서 우도함수와 좌도함수가 일치할 때 x=a에서 미분가능하다.
- 즉, 미분계수가 존재하면 미분가능
  미분계수의 존재는 미분계수의 정의식에 의해 구함

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\mathrm{a}+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\mathrm{a}+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

좌도함수 우도함수

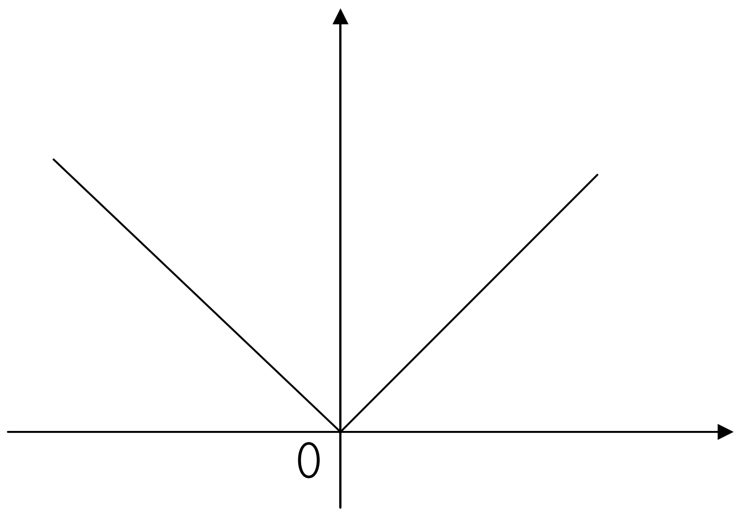
함수 y=$|x|$상의 점 x=0에서 미분가능한지를 판별하라.

< 풀이>

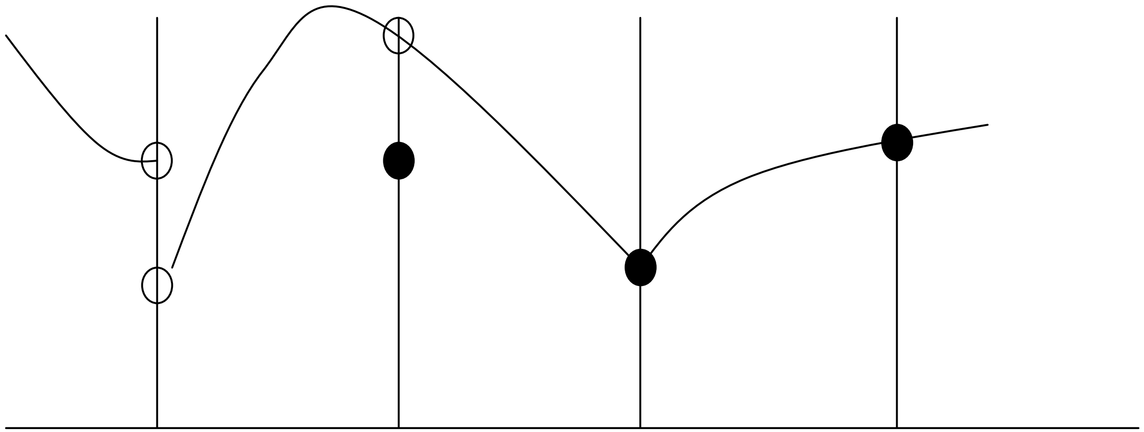
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

$\therefore$ 우도함수 $\neq$ 좌도함수이므로 미분불가능



- 미분이 가능하면 연속함수이지만 연속함수라고 해서 모두 미분 가능한 것은 아니다.
- 불연속이면 미분 불가능
- 첨점과 불연속점은 미분불가능



극 한 값:	X	O	O	O
연 속:	X	X	O	O
미분가능:	X	X	X	O

2. 도함수의 정의

함수 y=f(x)에서

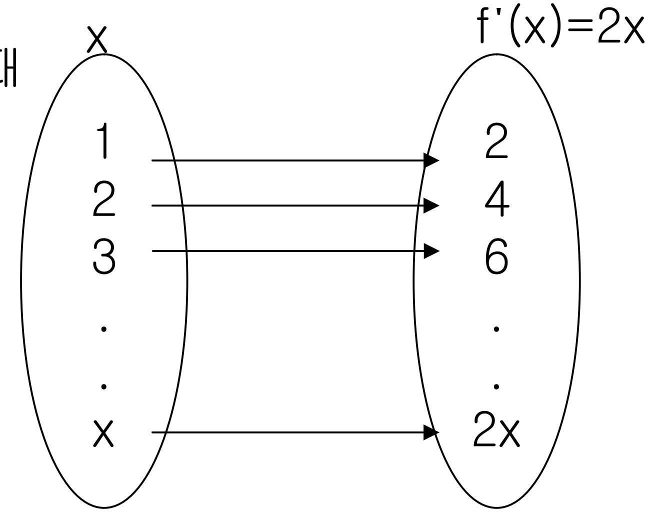
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathrm{x}+\Delta x)-f(\mathrm{x})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{x}+h)-f(\mathrm{x})}{h}$$ 를 x에 관한 y의 도함수라고 하고

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \mathrm{D}_x\, y$$

도함수를 구하는 것을 “미분한다”라고 하며 함수를 미분하라는 것은 도함수를 구하라는 것임.

f(x)=x^2일 때



- 고차 도함수
  - 함수의 도함수: (1차)도함수 $f'(x)=dy/dx$
  - 도함수의 도함수: 2차도함수 $f''(x)=d^2y /dx^2$
  - 2차도함수의 도함수: 3차도함수 $f'''(x)= d^3y /dx^3$
  - (N-1)차도함수의 도함수: n차도함수 $f^{(n)}(x)= d^ny /dx^n$
- 도함수와 함수의 개략적 모양
  - 함수 $y=f(x)$에 대하여 1차도함수($f'(x)$)의 미분계수가 양수(+)이면 $f(x)$의 독립변수(x)가 증가(감소)할 때 종속변수(y)도 증가(감소)하고 있음을 의미-강증가함수
  - 함수 $y=f(x)$에 대하여 1차도함수($f'(x)$)의 미분계수가 음수(-)이면 $f(x)$의 독립변수(x)가 증가(감소)할 때 종속변수(y)도 감소(증가)하고 있음을 의미-강감소함수
  - 1차도함수의 미분계수가 0이면 그 점에서 독립과 종속의 변화가 없음을 의미-극소점 또는 극대점(변곡점)
  - 2차도함수($f''(x)$)의 미분계수가 양수이면 원점에 대하여 볼록함수, 음수이면 원점에 대하여 오목함수임.

3. 미분공식

$a)\, f(x) = c$에 대하여 c가 상수일때 $\frac{d}{dx}c = f'(x) = 0$

(증명） $\frac{d}{dx}c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$

$b)\ f(x) = mx + b$에 대하여（m, b는 상수) $\frac{d}{dx}(\mathrm{mx+b}) = f'(x) = m$

c) $f(x) = x^n$에 대하여 $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}x^n = f'(x) = nx^{n-1}$

$d)\ \frac{d}{dx}[cf(x)] = \mathrm{c}\frac{d}{dx}f(x) = \mathrm{c}f'(x)$

e) $\frac{d[f(x)\cdot g(x)]}{dx} = f'(x)\,\mathrm{g(x)} + \mathrm{f(x)\,g'(x)}$

f) $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f'(x)\,\mathrm{g(x)} - \mathrm{f(x)\,g'(x)}}{[g(x)]^2}$ (단, $\mathrm{g(x)} \neq 0$)

예제) 다음 함수를 미분하시오.

1） $f(x) = 4x^2 + 3\sqrt{x}$

2) $f(x) = \sqrt{x}(x^4 + 3)$

3) $f(t) = (t^2 + 2)(t^3 - 5)$

4) $h(x) = x / (x-1)$ (단,x $\neq 5$)

5) $h(x) = (x^3 + 3) / \sqrt{x}$

6) $h(x) = (x^3 + x + 1) / (x^2 - 5)$ (단, $x^2 \neq 5$)

7) $m(x) = (x^2 + 3)(x^3 + 2x^2 + 5)$

8) $T(x) = (x^2 + 1)(2x + 1)(3x + 1)$

- 합성함수의 미분
  - 연쇄의 법칙
    두 개 이상의 함수가 합성된 경우에 사용할 수 있는 미분공식
  - 두 함수 f와 g가 미분가능할 때 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 로 정의될 때 그 도함수는 다음과 같다.

$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x)) \qquad \mathrm{u}=\mathrm{g(x)}\text{라고 하면}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'(u)g'(\mathrm{x})$$

$$\frac{df[g(x)]}{dx}=f'[g(x)]g'(x)$$

- 역함수의 미분
  - 함수 y=f(x)가 쌍사함수이고 역함수를 x=g(y)라 하면 역함수의 도함수는 다음과 같다.
  - $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{또는 } \mathrm{g'(x)}=\frac{1}{f'(x)}$$

다음 함수의 도함수를 구하시오.

1) $h(x) = (x^2 - x + 7)^5$

2) $D(p) = \sqrt{5p - 3}$

3) $f(x) = (\frac{x^5}{2x-1})^{25}$ (단, $2x \neq 1$)

4) $f(x) = (x+1)^3 (x^2 - 1)^2$

5) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

6) $y = (2x^2+1)^{10}$을 미분하시오.

7) $y = x^3 + 2x + 1, \quad x = z^2 - \sqrt{z}$일 때 $\dfrac{dy}{dz}$를 구하라.

8) $z = 3y + 4y^2, \quad y = x^2 + 1$일 때 $\dfrac{dz}{dx}$를 구하라.

예제)재화에 대한 수요가 가격함수이고 가격은 높은 니플레이션 속에서 시간(t)에 따라 상승한다. 수요함수와 가격이 각각 다음과 같이 정의될 때 연쇄법칙을 사용하여 시간의 흐름에 따른 수요변화율을 구하라.

$$Q^d = D(p) = 1{,}000 - 5p - 0.1p^3$$

$$p = 2t^{\frac{3}{2}}$$

<풀이>

$$\frac{dQ^d}{dt} = \frac{dQ^d}{dp}\frac{dp}{dt}$$

$= (-0.3p^2 - 5)(3t^{\frac{1}{2}})$ 미분의 결과가 t에 관한 함수이므로

p를 $2t^{\frac{3}{2}}$으로 대체하면

$=[-0.3(2t^{\frac{3}{2}})^2 - 5](3t^{\frac{1}{2}})$

$= -3.6t^{\frac{7}{2}} - 15t^{\frac{1}{2}}$

예제) 다음 함수의 $\dfrac{dx}{dy}$가 존재하는지 여부를 밝히시오.

1) $\mathrm{y} = \mathrm{x}^3 + 2x$

2) $y = -x^4 + 100$

3)함수 $\mathrm{y} = \mathrm{x}^3 + 2x$의 역함수를 구하고 역함수의 도함수를 구하시오.

4) $x = y\sqrt{1+y}$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

5) $x = t - 2, y = t^2$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

- 로그함수와 지수함수의 미분

[로그함수의 정의]

지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$가 주어졌을 때 임의 의 양수 b에 대하여 $a^x = b$를 만족하는 실수 x를 $x = \log_a b$로 나타내고 a를 밑으로 하는 b의 로그라고 함.

따라서 $a^y = x$일 때 $y = \log_a x$가 성립하며 이를 로그함수라고 함.

[로그함수의 특성](단, a>0, a $\neq$ 1, c>0, c $\neq$ 1, p>0, b>0)

1) $\log_a pq = \log_a p + \log_a q$

2) $\log_a \frac{1}{p} = -\log_a p$

3) $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

4) $\log_a p^r = r \log_a p$

5) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

[로그함수의 특성](단, a>0, $a \neq 1$, c>0, $c \neq 1$, p>0, b>0)

6) $\log_a b = \dfrac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = \dfrac{\log b}{\log a}$

7) $\log_a b = \dfrac{\log_e b}{\log_e a} = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

8) $\mathrm{a}^{\log_a b} = b, \quad e^{\ln b} = b,$

9) $\mathrm{a}^{\log_a b^x} = b^x, \qquad e^{\ln b^x} = e^{\mathrm{x} \ln b} = b^x$

[로그함수의 미분]

함수 f(x)의 도함수가 존재할 때

$a) y = \ln f(x)$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$b) y = \log_a f(x)$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

[지수함수의 미분]

함수 f(x)의 도함수가 존재할 때

$a) y = e^{f(x)}$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

$b) y = a^{f(x)}$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}a^{f(x)} = f'(x) \cdot \mathrm{a}^{f(x)} \cdot \ln a$

예제) 다음 함수들의 도함수를 구하시오.

1) $f(x)=\ln(x^2+x^4)$

2) $y=e^{rx}$

3) $y=x\cdot e^{x}$

4) $y=x\cdot e^{x^2}$

5) $y=\dfrac{1}{e^{t}+1}$

6) $y=\ln(e^{3x}+x^2)$

7) $y=\dfrac{4-x}{\ln x}$

8) $q=\sqrt{1+e^{2p}}$

도함수의 응용

1. 탄력성(elasticity)
   독립변수의 변화량에 대하여 종속변수의 변화량을 측정한 것으로 단위의 차이에 의해 탄력성의 크기가 달라지므로 이를 비율로 표준화하여 분석한 퍼센트 변화율.
   1) 수요의 가격탄력성(E_p)
      독립변수(가격)가 변화할 때 종속변수(수요량)가 얼마나 민감하게 반응하는지를 측정한 것(절대값으로 읽어줌)
      ① 호탄력성

수요함수 $Q_d = D(p)$에 대하여 (Q_d : 수요량 p : 가격)

$$E_P = \frac{\text{수요량의 변화율}}{\text{가격의 변화율}}$$

$$= \frac{\dfrac{D(p+\Delta p) - \mathrm{D(p)}}{D(p)}}{\dfrac{(\mathrm{p} + \Delta\,\mathrm{p}) - \mathrm{p}}{p}} = \frac{\dfrac{\Delta D}{D(p)}}{\dfrac{\Delta\,\mathrm{p}}{p}}$$

$$= \frac{\Delta D}{\Delta p}\frac{p}{D(p)}$$

② 점탄력성

$$E_p = \lim_{\Delta p \to 0}\left[\frac{\Delta D}{\Delta p}\frac{p}{D(p)}\right]$$

$$= \mathrm{D'(p)}\frac{p}{D(p)}$$

E_P =−∞ : 완전탄력적　　　E_P <−1 : 탄력적

E_P =−1 : 단위탄력적　−1< E_P <0 : 비탄력적

E_P =0 : 완전비탄력적

예제) 수요함수가 $Q_d = 20 - 2P$로 주어질 때 P=2에서 가격탄력성(점탄력성)을 구하라.

<풀이>

$E_P = D'(p)\dfrac{P}{D(p)}$이므로

$D'(2) = -2,\quad \dfrac{2}{D(2)} = \dfrac{2}{16}$

$\therefore E_P = (-2)\dfrac{2}{16} = -\dfrac{1}{4}$

가격이 1% 상승하면 수요량은 0.25%하락함을 의미-비탄력적

예제) 복사용지에 대한 수요함수가 $D(p) = 50 - 2P$이다.

P=5에서 점탄력성을 구하고 어느 가격범위에서 수요가 탄력적인지 분석하라.

<풀이>

1) $E_P = D'(p)\dfrac{P}{D(p)}$이므로 $D'(5) = -2,\quad \dfrac{5}{D(5)} = \dfrac{5}{40}\quad \therefore E_P = (-2)\dfrac{5}{40} = -\dfrac{1}{4}$

가격이 1% 상승하면 수요량은 0.25%하락함을 의미-비탄력적

2)수요가 탄력적이기 위해서는 $E_p < -1$이어야 함

$\therefore \dfrac{-2p}{50-2p} < -1 \quad \Rightarrow 2p > 50 - 2p \Rightarrow 4p > 50$이므로 $p > 12.5$

예제) 닭고기 수요가 $D(p) = 100P^{-2}$로 추정된다. P=1.284에서 점탄력성을 구하라.

<풀이>

$$E_P = D'(p)\frac{P}{D(p)}$$

$$= -200p^{-3}\frac{p}{100 \cdot p^{-2}} = \frac{-200p^{-2}}{100 \cdot p^{-2}} = -2$$

가격이 1% 상승하면 수요량은 2%하락함을 의미-탄력적

점탄력성은 가격과 상관없는 상수이다.

2. 한계의 개념

경영/경제학에서 한계의 개념은 함수 y=f(x)에서 x가 1단위 변화할 때 y의 변화량을 의미하며 즉 dy/dx=f′(x)이다.

① 효용함수

재화(X)의 사용량에 따른 효용(U)과의 함수관계

한계효용

효용함수 U=U(x)에서 도함수 dU/dX=U′(x)는 x재의 한계효용

재화 1단위를 소비함에 따라 추가적인 총효용의 증가량

② 한계비용

총비용함수 C=C(Q)에서 도함수 dC/dQ=C′(Q)는 한계비용

생산물 1단위를 증가시킴에 따라 기업이 추가적으로 지출하는 총비용

③ 한계수입

총수입함수 R=R(Q)에서 dR/dQ=R′(Q)는 한계수입

산출물(Q) 1단위를 판매함으로써 기업이 얻을 수 있는 추가적인 수입(R)

어느 제품에 대한 수요함수가 $Q = 1,000 - 2p$로 주어져 있을 때 총수입함수와 한계수입함수를 유도하여라.

풀이

총수입함수는 $TR = pQ$로 정의되므로 $p = 500 - \frac{1}{2}Q$라는 사실을 TR에 대입하면 다음 결과가 도출된다.

$$TR = \left(500 - \frac{1}{2}Q\right)Q = 500Q - \frac{1}{2}Q^2$$

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 500 - Q$$

한국엔진은 새로 개발한 β엔진의 생산비용을 추정한 결과 $C(Q)=\frac{Q^2}{2}+20Q$ $+5,000$ (단위 : 만원)이 됨을 알 수 있었다.

(a) 한계생산비용함수를 구하여라.

(b) $Q=1,000$일 때의 한계생산비용을 구하여라.

(c) 실제 1,001번째 엔진의 생산에는 얼마가 소요되는가?

(d) 평균생산비용함수를 도출하고 평균생산비용과 한계생산비용이 일치할 때의 생산량 x를 구하여라.

풀이

(a) $C'(Q) = Q + 20$

(b) $C'(1,000) = 1,020$

(c) $C(1,001) - C(1,000)$

$$= \frac{(1,001)^2}{2} + (20)(1,001) - \frac{(1,000)^2}{2} - (20)(1,000)$$

$$= 501,000.5 + 20,020 - 500,000 - 20,000$$

$$= 1,020.5$$

(d) $\overline{C}(Q) = \frac{Q}{2} + 20 + \frac{5,000}{Q}$

$$\overline{C}(Q) = C'(Q)$$

$$\frac{Q}{2} + 20 + \frac{5,000}{Q} = Q + 20$$

$$\frac{5,000}{Q} = \frac{Q}{2} \Rightarrow Q^2 = 10,000 \Rightarrow Q = 100 \quad (\because Q > 0)$$

풀이

(a) $C'(Q) = Q + 20$

(b) $C'(1,000) = 1,020$

(c) $C(1,001) - C(1,000)$

$$= \frac{(1,001)^2}{2} + (20)(1,001) - \frac{(1,000)^2}{2} - (20)(1,000)$$

$$= 501,000.5 + 20,020 - 500,000 - 20,000$$

$$= 1,020.5$$

(d) $\overline{C}(Q) = \dfrac{Q}{2} + 20 + \dfrac{5,000}{Q}$

$\overline{C}(Q) = C'(Q)$

$$\frac{Q}{2} + 20 + \frac{5,000}{Q} = Q + 20$$

$$\frac{5,000}{Q} = \frac{Q}{2} \Rightarrow Q^2 = 10,000 \Rightarrow Q = 100 \ (\because Q > 0)$$