

# 5장 행렬식과 연립방정식(2)

## ※ 역행렬의 도출방법

### 1) 가우스-조던 소거법

정방행렬  $A$ 의 우측에 동일차원의 단위행렬을 추가시켜 기본행 연산을 수행하여 좌측의 행렬을 단위행렬로 변화시키면 우측의 단위행렬의 변화가 일어나는데 좌측의 행렬이 단위행렬이 되었을 때 변화된 우측의 행렬이 역행렬임.

#### ➤ 기본행 연산이란?

- 행렬의 임의의 두행을 서로 바꾸거나
- 임의의 한행에 0이 아닌 상수를 곱하거나.
- 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 행에 더하거나 빼는 것

가우스-조단 소거법을 응용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하여라

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

풀이

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \rightarrow & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right] \\ \rightarrow & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2) 수반(부수)행렬(adjoint matrix) 이용법

수반행렬: 여인수 행렬의 전치행렬  $\text{adj } A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{일 때} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad C' = \text{adj } A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$AC' = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}c_{1j} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}c_{2j} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}c_{3j} \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}c_{1j} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}c_{2j} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}c_{3j} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}c_{1j} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}c_{2j} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}c_{3j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

타여인수에 의한  
행렬식

$$|A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I$$

$$AC' = |A| I$$

$$\frac{AC'}{|A|} = I \quad \text{양변에 } A^{-1} \text{을 곱하면}$$

$$\frac{A^{-1}AC'}{|A|} = A^{-1}I$$

$$A^{-1} = \frac{C'}{|A|} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

※ 수반행렬을 이용한 역행렬 도출 순서

1.  $A$ 의 행렬식으로부터 비특이 판정
2. 여인수 행렬을 구한다.
3. 여인수 행렬의 전치행렬을 구한다.(수반행렬)
4.  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$  를 적용하여 구함.

수반행렬을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} M_{11} - M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} - M_{32} \\ M_{13} - M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -2-7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1-5 & -1 \end{bmatrix}$$

여기서  $|A| = -1$ 이므로

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$



다음 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내어라.

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \\x_1 - x_2 - x_4 &= -2 \\-5x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 &= 12\end{aligned}$$

풀이

행렬  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{X}$ 를 다음과 같이 정의하면

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + x_3 \mathbf{A}_3 + x_4 \mathbf{A}_4 = \mathbf{B}$$



## [크라머공식유도]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{라고 할 때}$$

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = \frac{\text{adj } A}{|A|} B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{13} & C_{23} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n C_{j1} b_j \\ \sum_{j=1}^n C_{j2} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n C_{jn} b_j \end{bmatrix}$$

여기서

$$\sum_{j=1}^n C_{j1} b_j = |A_1| \text{라고 하면}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + b_3 C_{31} + \cdots + b_n C_{n1} = \sum_{j=1}^n C_{j1} b_j$$

따라서

$|A_j|$ 는 행렬식  $A$ 의  $j$ 열을 상수행렬로 대체시킨 행렬식이다.

그러므로

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \vdots \\ |A_n| \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \end{bmatrix}$$

다음 연립방정식의 해를 크레머의 공식을 이용하여 구하여라.

$$x - 2z = 0, \quad 8x + 5y - z = 3, \quad 2x + 3y + 4z = -2$$

풀이

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = (1)(1) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)(0) + (1)(-2) \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$x = \frac{\Delta_1}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{0+0-2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{38}{5}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (2) \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{54}{5}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(1) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0}{-5} = \frac{19}{5}$$

따라서 연립방정식의 해는  $(x = \frac{38}{5}, y = -\frac{54}{5}, z = \frac{19}{5})$ 가 된다.

다음 연립방정식의 해를 가우스-조단 소거법을 이용하여 구하여라.

$$\begin{aligned}2x + z &= 10 \\ 2y - z &= 0 \\ -6x - 3y + z &= 0\end{aligned}$$

풀이

$$\begin{aligned}& \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 30 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 30 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 60 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array} \right]\end{aligned}$$

따라서  $x = -1$ ,  $y = 6$ ,  $z = 12$ 가 도출된다.

행렬  $\mathbf{A}$  가 다음과 같이 주어졌을 때  $\mathbf{A}^{-1}$  을 구하여라.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

풀이

$\mathbf{A}$ 의 행렬식은  $\det \mathbf{A} = 27 - 25 = 2$  이므로  $\mathbf{A}^{-1}$ 이 존재함을 알 수 있다.

$\mathbf{A}^{-1}$ 은 다음 두 연립방정식의 해를 구하면 계산할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}}{2} = \frac{9}{2}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{5}{2}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$