5장 행렬식과 연립방정식(1)

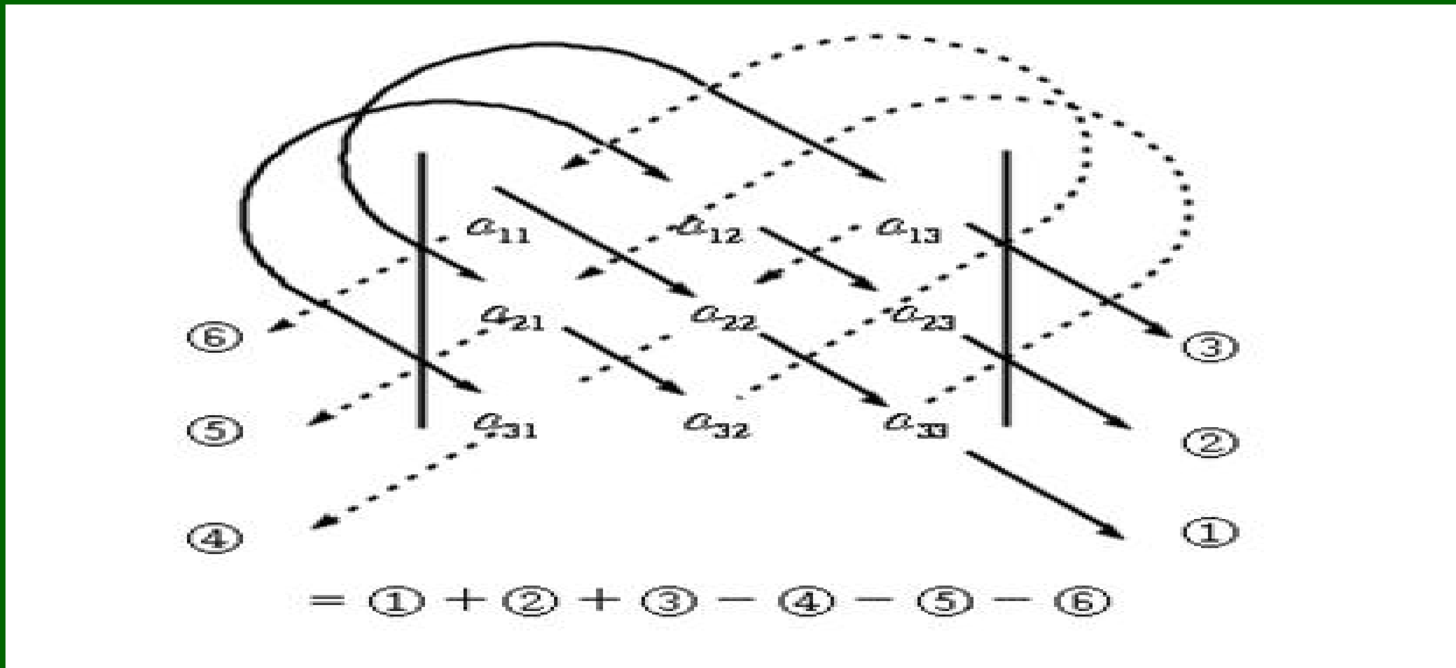
제1절 행렬식의 개념과 속성

■ 행렬식(Determinant)이란 행렬과는 달리 하나의 숫자(스칼라)로서 정방행렬에서만 정의된다. 정방행렬 A에 대한 행렬식은 det A 또는 |A|로 표시한다.

■ 행렬식의 계산법

1) 사루스(Sarus)법칙

우측 대각요소를 곱하여 차례로 합한 값에서 좌측 대각요소의 곱을 차례로 합하여 뺀 값



2) 라플라스 전개(Laplace Expansion)

- 라플라스 전개를 위한 임의의 기준행(또는 열)의 원소와 여인수의 곱의 합으로 행렬식을 계산하는 방법
- 여인수(=여인자 cofactor): C_{ij}
  - 소행렬 M_{ij}에 $(-1)^{(i+j)}$를 곱한 것 $C_{ij} = (-1)^{(i+j)}M_{ij}$
- 소행렬식(minor matrix): M_{ij}
  - 정방행렬(n×n)에서 M_{ij}는 i행 j열의 원소를 제외하고 남은 원소들을 그대로 배열한 (n−1)×(n−1)행렬의 행렬식
- 전개방식은 어떤 행 또는 어떤 열에 대하여 전개하여도 행렬식은 동일함.

– 정방행렬 A행렬의 원소를 a_{ij} 라 할 때 A의 행렬식은

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_{ki} \quad (k\text{행을 기준으로 전개할 때})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} M_{ki}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} c_{ik} \quad (k\text{열을 기준으로 전개할 때})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}$$

다음과 같이 행렬 **A**가 주어져 있을 때 두 번째 열을 구성하는 원소들의 소행렬식을 이용하여 det **A**를 구하여라.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

풀이

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (-1)a_{12}\mathrm{M}_{12} + (+1)a_{22}\mathrm{M}_{22} + (-1)a_{32}\mathrm{M}_{32} \\ &= (-7)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 259 - 33 + 12 = 238 \end{aligned}$$

행렬 **A**가 3×3인 경우 **A**의 행렬식은 다음 식을 통해 간단히 구할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \; & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{aligned}$$

행렬 **A**가 아래와 같을 때 네 번째 열을 구성하는 원소들의 소행렬식을 이용하여 det **A**를 구하여라.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&7&-1&0\\0&4&2&6\\4&3&1&2\\5&-2&-8&0\end{bmatrix}$$

풀이

$$\det\mathbf{A}=(-1)a_{14}\mathrm{M}_{14}+(+1)a_{24}\mathrm{M}_{24}+(-1)a_{34}\mathrm{M}_{34}+(+1)a_{44}\mathrm{M}_{44}$$

$$=0+(6)\begin{vmatrix}2&7&-1\\4&3&1\\5&-2&-8\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}2&7&-1\\0&4&2\\5&-2&-8\end{vmatrix}+0$$

$$=(6)(238)-(2)(34)=1,360$$

※ 행렬식을 이용한 비특이행렬 판별

- 정방행렬 A가 역행렬을 가지면 비특이행렬이라 함.(Nonsingular matrix)
- 정방행렬 A가 역행렬을 가지지 않으면 특이행렬이라 함.(Singular matrix)
- 비특이 행렬이면 방정식의 해를 가진다는 의미

$|A| \neq 0$일 때

- A는 비특이행렬
- 역행렬 존재
- A의 모든 열벡터(행벡터)는 일차 독립임.

※ 행렬식의 특성

1. 임의의 정방행렬 A가 0의 행(또는 열)을 하나이상 가지고 있으면 행렬식은 0이다.

2. 임의의 정방행렬 A의 두행(또는 열)이 같다면 행렬식은 0이다.

3. 임의의 정방행렬 A의 행과 열을 서로 바꾸더라도 행렬식의 값은 변하지 않는다. A의 전치행렬식과 A의 행렬식은 같다.

4. 임의의 정방행렬 A의 어떤 행(또는 열)이 다른 행(또는 열)의 상수배와 같다면(일차종속) 행렬식은 0이다.

5.임의의 정방행렬 A의 두 행(열)을 바꾸었을 때, 그 행렬식의 값은 -1을 곱한 값과 같다.

6. 임의의 정방행렬 A의 한 행(열)에 k를 곱해주면 그 행렬식의 k배와 같다.

7. 임의의 정방행렬 A에 대하여 i번째 행(열)을 k배하여 j번째 행(열)에 더해도 행렬식의 값은 변화 없다.

8.임의의 정방행렬 A가 삼각행렬이면 행렬식은 주대각 원소를 곱한 값과 같다.

9. 임의의 두 정방행렬 A,B에 있어 두 행렬을 곱한 행렬식값은 각 행렬의 행렬식 값을 곱한 값과 같다.(교환법칙 성립)

10. 타여인수를 사용하여 행렬식을 전개한다면 그 행렬식의 값은 항상 0이다.

5장 행렬식과 연립방정식(2)

※ 역행렬의 도출방법

1) 가우스-조던 소거법

정방행렬 A의 우측에 동일차원의 단위행렬을 추가시켜 기본행연산을 수행하여 좌측의 행렬을 단위행렬로 변화시키면 우측의 단위행렬의 변화가 일어나는데 좌측의 행렬이 단위행렬이 되었을 때 변화된 우측의 행렬이 역행렬임.

➢ 기본행 연산이란?

- 행렬의 임의의 두행을 서로 바꾸거나
- 임의의 한행에 0이 아닌 상수를 곱하거나.
- 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 행에 더하거나 빼는 것

가우스-조단 소거법을 응용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하여라

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

풀이

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2) 수반(부수)행렬(adjoint matrix) 이용법

수반행렬: 여인수 행렬의 전치행렬 adj A

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ 일때 } C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad C'=adj\,A=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$AC'=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}c_{1j} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}c_{2j} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}c_{3j} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}c_{1j} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}c_{2j} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}c_{3j} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}c_{1j} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}c_{2j} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}c_{3j} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

타여인수에 의한 행렬식

$$|A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=|A|I$$

$$AC'=|A|I$$

$$\frac{AC'}{|A|}=I \text{ 양변에 } A^{-1}\text{을 곱하면}$$

$$\frac{A^{-1}AC'}{|A|}=A^{-1}I$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{C'}{|A|}=\frac{1}{|A|}adj\,A}$$

※수반행렬을 이용한 역행렬 도출 순서

1. A의 행렬식으로부터 비특이 판정
2. 여인수 행렬을 구한다.
3. 여인수 행렬의 전치행렬을 구한다.(수반행렬)
4. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A$ 를 적용하여 구함.

수반행렬을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

여기서 $|A| = -1$이므로

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

제 2 절 연립일차방정식과 행렬식

1 연립방정식과 행렬

- 행렬은 다원일차연립방정식을 간결하게 나타내는 데 효과적으로 쓰임.

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{AX} = \mathbf{B}
$$

다음 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내어라.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_4 &= -2 \\ -5x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 &= 12 \end{aligned}$$

풀이

행렬 **A**, **B**, **X**를 다음과 같이 정의하면

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + x_3\mathbf{A}_3 + x_4\mathbf{A}_4 = \mathbf{B}$$

[크래머공식유도]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ 라고 할때

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = \frac{adj\ A}{|A|}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ C_{13} & C_{23} & \cdots C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} C_{j1}b_j \\ \sum_{j=1}^{n} C_{j2}b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} C_{jn}b_j \end{bmatrix}$$

여기서

$\sum_{j=1}^{n} C_{j1} b_j = |A_1|$라고 하면

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1C_{11} + b_2C_{21} + b_3C_{31} + \cdots\cdots + b_nC_{n1} = \sum_{j=1}^{n} C_{j1} b_j$$

따라서

$|A_j|$는 행렬식 A의 j열을 상수행렬로 대체시킨 행렬식이다.

그러므로

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \vdots \\ |A_n| \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} \\ x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{|A_n|}{|A|} \end{bmatrix}$$

다음 연립방정식의 해를 크레머의 공식을 이용하여 구하여라.

$$x \qquad - 2z = \quad 0, \quad 8x + 5y - \quad z = \quad 3, \quad 2x + 3y + 4z = -2$$

풀이

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = (1)(1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)(0) + (1)(-2)\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$x = \frac{\Delta_1}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{0+0-2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{38}{5}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (2)\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{54}{5}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(1)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0}{-5} = \frac{19}{5}$$

따라서 연립방정식의 해는 $\left(x = \frac{38}{5},\ y = -\frac{54}{5},\ z = \frac{19}{5}\right)$가 된다.

다음 연립방정식의 해를 가우스-조단 소거법을 이용하여 구하여라.

$$
\begin{aligned}
2x \qquad\quad + z &= 10 \\
2y - z &= 0 \\
-6x - 3y + z &= 0
\end{aligned}
$$

풀이

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 30 \end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 30 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 60 \end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]
$$

따라서 $x = -1$, $y = 6$, $x = 12$ 가 도출된다.

행렬 $\mathbf{A}$ 가 다음과 같이 주어져 있을 때 $\mathbf{A}^{-1}$ 을 구하여라.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

풀이

$\mathbf{A}$의 행렬식은 $\det\ \mathbf{A} = 27 - 25 = 2$ 이므로 $\mathbf{A}^{-1}$ 이 존재함을 알 수 있다.

$\mathbf{A}^{-1}$ 은 다음 두 연립방정식의 해를 구하면 계산할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}}{2} = \frac{9}{2}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{5}{2}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$