4장 행렬의 기본개념

제1절 행렬의 정의

1. 정의
   행렬이란 수 또는 변수 등의 일련의 개체들을 행(Row)과 열(Column)에 맞추어 직사각형 모양으로 순서 있게 배열하여 괄호[ ]로 묶은 것.
2. 용어
   - 원소, 성분
     괄호안의 개체와 같이 행렬을 구성하는 요소 보통 소문자로 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} 등으로 나타냄(i행 j열의 원소)
   - 행(Row): 행렬의 가로 줄
   - 열(Column): 행렬의 세로 줄

$$A = \begin{array}{cc} & \text{열} \\ \text{행} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

3. 행렬의 차원(dimension)

- 행렬의 크기를 말함.
- 행렬의 크기는 (행의 개수)×(열의 개수)로 나타냄. 만약 행의 개수가 m이고 열의 개수가 n이면 m×n(차원)행렬이라고 함.
- n차 정방행렬
  행과 열의 수가 같으면 정방행렬이라 하며 m=n이면 n차 정방행렬
- 행벡터
  행렬의 특수한 형태로 오직 한 개의 행만을 가지는 행렬
- 열벡터:한 개의 열만을 가지는 행렬
- 1×n 행렬은 n차 행벡터 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$

  m×1 행렬은 m차 열벡터 $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$

제2절 행렬의 연산

1. 행렬의 상등

- 두 행렬 A와 B의 행의 개수와 열의 개수가 각각 같을 때 이 두 행렬은 “같은 꼴”
- 같은 꼴의 두 행렬 A와 B의 대응하는 원소가 서로 같을 때 행렬 A와 B는 “서로 같다”(=상등) A=B
- 즉, m×n행렬 A와 B가 같기 위해서는 모든 행(i)와 열(j)에 대해 A의 (i,j)원소인 aij가 B의 (i,j)원소인 bij,와 같아야 A와 B는 상등이다.

2. 행렬의 연산

1) 행렬의 덧셈과 뺄셈

- 행렬의 덧셈과 뺄셈은 각 행렬이 “같은 꼴”일 때만 정의된다.
- 예를 들어 두행렬 A와 B에 대하여 A의 차원와 B의 차원이 같으면 각 행렬의 같은 위치에 있는 원소들을 서로 더하거나 뺄 수 있다. 두 행렬 A와 B에 대하여

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

- 행렬의 덧셈의 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.
  - ✓ A+B=B+A
  - ✓ (A+B)+C=A+(B+C)
- 영행렬(Zero metrix) : 행렬의 모든 원소가 0으로 이루어진 행렬
- 영행렬과 같은 꼴의 행렬에 대하여 다음이 성립.
  - ✓ 0+A=A+0=A
  - ✓ (−A)+A=A+(−A)=0

2) 스칼라 곱

- 스칼라(scalar): 수 또는 변수를 행렬과 구분하기 위하여 부르는 명칭 일반적으로 상수를 의미함. 예를 들어 스칼라 k와 행렬 A의 곱을 스칼라 곱(배)이라고 하며 아래와 같이 나타냄

$$kA=Ak=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

- 행렬 A와 B가 같은 꼴이며 스칼라 s와 t에 대하여 다음 정리가 성립함.
  - ✓ (st)A=s(tA)
  - ✓ (s+t)A=sA+tA
  - ✓ s(A+B)=sA+sB

(예제3.2)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

a)A+ X=B를 만족시키는 행렬 X를 구하라

b)Y+ B=A를 만족시키는 행렬 Y를 구하라.

(예3.3)

$A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$

a)A+ 2B=X를 만족시키는 행렬 X를 구하라

b)B-2A=X를 만족시키는 행렬 Y를 구하라.

(예3.4)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때 행렬 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 를 실 수 x와 y를 이용하여 두 행렬의 가중합인 xA+ yB의 형태로 나타내라.

3) 행렬의 곱셈

- 두 행렬 (m×k)행렬 A와 (k×n)행렬 B에 대하여 A행렬의 열의 수와 B행렬의 행의 수가 같을 때 행렬의 곱셈 AB가 정의 될 수 있다. A행렬과 행렬의 곱은 (m×n)행렬이 된다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

이면

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{k} a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^{k} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{k} a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{k} a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a_{mi}b_{in} \end{pmatrix}$$

- 행렬의 곱셈 정리
  - 교환법칙:일반적으로 성립하지 않음(AB≠BA)
    - 단위행렬과의 교환법칙 성립(AI=IA A:행렬 I:단위행렬)
    - 스칼라 곱의 교환법칙 성립(kA=Ak k:스칼라)
  - 결합법칙:성립
  - 분배법칙 성립
  - 행렬 A가 정방행렬이고 항등행렬의 곱일 때는 $A \times A \times \cdots A = A^n$ 성립
  - 합과 곱이 정의되는 행렬 A,B,C에 대하여
    - (kA)B=A(kB)=k(AB) (여기서 k는 스칼라)
    - (AB)C=A(BC)
    - (A+B)C=AC+BC
    - A(B+C)=AB+AC

- 행벡터와 열벡턱의 곱은 스칼라(=내적)
- 열벡터와 행벡터의 곱은 행렬(=외적)
- 행렬과 열벡터의 곱은 열벡터
- 행벡터와 행렬의 곱은 행벡터

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$에 대하여

$AB=\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & df+dh \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix}$에 대하여

$CD=\begin{bmatrix} aj+bm+cp & ak+bn+cq & al+bo+cr \\ dj+em+fp & dk+en+fq & dl+eo+fr \\ gj+hm+ip & gk+hn+iq & gl+ho+ir \end{bmatrix}$

다음 행렬의 곱을 계산하라.

$a)\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -20 \end{bmatrix}$

$b)\quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -a^2 \\ b & -b^2 \\ -b & -c^2 \end{bmatrix}$

다음 연립방정식을 $AX=B$의 형태로 나타내라. 단, $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$로 정의한다.

$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2+x_3&=15 \\ x_1-2x_2+5x_3&=20 \\ 5x_1+x_2-10x_3&=5 \end{aligned}$$

- (예제 3.10)갑 도너츠 회사는 A형과 B형의 두 가지 유형의 도너츠를 판매. 1 세트당 A형의 가격은 10,000원, B형의 가격은 12,000원이다. 지난달 A형 도너츠의 매출량은 15,000세트, B형은 27,000세트였다. 도너츠 생산에 투입되는 식자재는 밀가루 11,000kg, 버터 15,000kg, 설탕 15,000kg이었다. 각 식자재의 구입가는 kg당 각각밀가루 10,000원, 버터 10,000원, 설탕 8,000원이라고 가정하고 갑 회사의 순이익을 행렬을 이용하여 구하라.

(풀이)

- 매출액−비용=순이익
- 매출액=(A형 세트당 가격×A형매출량)+ (B형 세트당 가격×B형매출량) 스칼라로 표현되어야 하기 때문에 [행벡터 ×열벡터]의 형식으로 행렬이 표현되어 야 함. 행렬의 차원 (1×2)(2×1)=(1×1)

매출액

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10000 & 12000 \end{bmatrix}}_{\text{판매단가}} \underbrace{\begin{bmatrix} 15000 \\ 27000 \end{bmatrix}}_{\text{매출량}} = [(10000 \times 15000) + (12000 \times 27000)] = [474000\text{천 원}]$$

- 비용=(식자재 유형별 구입단가 × 식자재 유형별 사용량) 스칼라로 표현되어야 하기 때문에 [행벡터 ×열벡터]의 형식으로 행렬이 표현되어 야 함

비용

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10000 & 10000 & 12000 \end{bmatrix}}_{\text{구입단가}} \underbrace{\begin{bmatrix} 11000 \\ 15000 \\ 15000 \end{bmatrix}}_{\text{사용량}} = [380000\text{천 원}]$$

- 순이익=[474000천원]−[380000천원]=[94000천원]

[에제3.11]주택모델별 외장스타일에 따른 건축할 주택의 수의 구성을 나타내는 행렬 P와 외장스타일에 따른 자재 유형별 투입량은 행렬 Q이다. 각 자재의 유형별 단위당 구입가는 행렬 R이다.

1) 모델 A와 모델 B에 소요되는 외장재비는 각각 얼마인가?

2) 외장재투입비용을 자재유형별로 계산하라.

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{현대식} & \text{전통식} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{모델 } A \\ \text{모델 } B \\ \text{모델 } C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ 10 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \text{콘크리트} & \text{목재} & \text{벽돌} & \text{첨가재} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{현대식} \\ \text{전통식} \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 2 \\ 50 & 1 & 20 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$R = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} \text{콘크리트} \\ \text{목재} \\ \text{벽돌} \\ \text{첨가재} \end{array} & \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

(풀이)

1) 외장재비=(각 주택수×자재별투입량)×자재구입단가

$$(PQ)R = \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ 10 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 2 \\ 50 & 1 & 20 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{콘크리트} & \text{목재} & \text{벽돌} & \text{첨가재} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1500 & 30 & 600 & 60 \\ 1100 & 40 & 400 & 60 \\ 1200 & 60 & 400 & 80 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 72900 \\ 54700 \\ 60800 \end{bmatrix} \end{array}$$

2) 자재별 총투입비용=자재별총투입량×자재별구입단가

(행벡터) 행벡터 열벡터

$$
(PQ)R = \begin{array}{cccc} \text{콘크리트} & \text{목재} & \text{벽돌} & \text{첨가재} \\ \end{array}
$$

$$
(PQ)R = \begin{bmatrix} 1500 & 30 & 600 & 60 \\ 1100 & 40 & 400 & 60 \\ 1200 & 60 & 400 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} 72900 \\ 54700 \\ 60800 \end{bmatrix}
$$

열의 합

$$
S = \begin{bmatrix} 3800 & 130 & 1400 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\overset{\text{콘크리트}}{76000} + \overset{\text{목재}}{23400} + \overset{\text{벽돌}}{84000} + \overset{\text{첨가제}}{5000}}_{\text{총자재투입비}} \end{bmatrix}
$$

제3절 행렬의 유형

1. 단위행렬(항등행렬 identity matrix, unit matrix)

- 주 대각원소가 모두 1이고 나머지 원소가 0으로 이루어진 정방행렬
- 대수법칙의 곱셈의 항등원에 해당한다.
- m×n 행렬인 A에 대하여 A에 단위행렬을 곱하거나 단위행렬에 A를 곱해도 A는 불변.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AI = IA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

2. 정방행렬(Square matrix)
   - 행과 열의 수가 같은 행렬(n×n)
3. 영행렬(Zero matrix)
   - 모든 원소가 0으로 이루어진 행렬
   - 반드시 정방행렬일 필요는 없다,
   - 대수법칙의 덧셈의 항등원에 해당
4. 전치행렬(Transpose matrix)
   - 원래의 행렬의 행과 열을 바꾼 행렬
   - 행렬 A의 전치행렬은 A^T 또는 A' 로 표시
   - 성질
   - ✓ $(A^T)^T=A$
   - ✓ $(A+B)^T=A^T+B^T$
   - ✓ $(AB)^T=B^TA^T$
   - ✓ $(kA)^T=kA^T$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad A^T=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad B^T=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

5. 대칭행렬(Symmetric matix)

- 주대각원소를 제외한 나머지 원소가 주대각원소를 중심으로 대칭적으로 배열된 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 멱등행렬(Idempotent matrix)

- 행렬자신을 곱이 자신의 행렬이 되는 행렬
- 단위행렬, 영행렬도 멱등행렬

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

7. 삼각행렬(Triangular matrix)

- 주대각원소를 중심으로 하부 또는 상부의 원소들만이 0이 아니고 나머지 원소는 모두 0으로 이루어진 행렬

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ 또는 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$$

8. 치환행렬(Permutation matrix)

- 원소가 0이거나 1인 정방행렬로서 각 행과 각 열에 1인 원소가 하나씩 있는 행렬
- 임의의 행렬 A에 앞에서 곱하면 A의 행이 바뀌고(행교환) 뒤에서 곱하면 열이 바뀜(열교환).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{bmatrix}$$

9. 역행렬(Inverse matrix)

- 단위행렬이 나오도록 특정행렬에 곱하여진 **정방행렬**
- 즉 행렬 A×B가 단위행렬이 되면(AB=I) A의 역행렬은 B이다. 즉, A^{-1}=B이며 또한 B의 역행렬 즉 B^{-1}은 A이다.
- 그러므로 A와 B는 정방행렬이어야 함. 단, 정방행렬이라고 해서 모두 역행렬을 가지는 것은 아님.
- 치환행렬의 역행렬은 자신의 전치행렬이다.
- 정방행렬 A가 그 역행렬을 가지면 **비특이행렬** (nonsingular matrix)이라고 함.
- 정방행렬 A가 역행렬을 가지지 않으면 **특이행렬** (singular matrix)라고 함.
- 성질
  - ✓ $(A^{-1})^{-1}=A$
  - ✓ A와 B의 역행렬이 존재할 때 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$