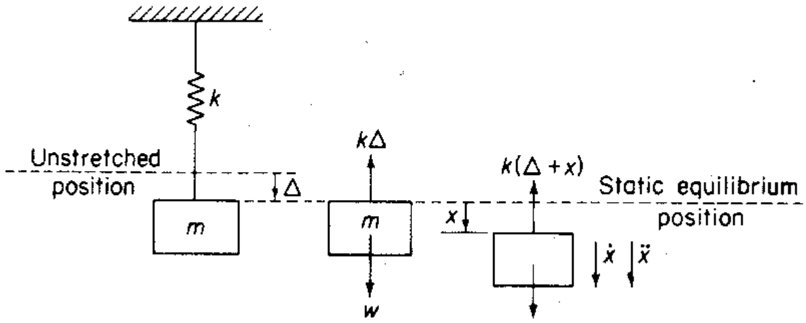
제 2 장 1자유도계의 자유진동

2-1. 비감쇠 병진계의 자유진동

2-1-1. Newton의 운동 제 2법칙을 이용한 운동 방정식

- 비감쇠 질량-스프링 진동 시스템



- 정적 평형방정식

$$k\Delta = w = mg$$

- 동적 평형방정식 (Newton 제2법칙)

$$m\ddot{x} = \sum F = w - k(\Delta + x) = -kx$$

- 운동방정식

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (1)$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

여기서, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ (고유진동수)

2-1-2. 에너지 보존의 법칙을 이용한 운동 방정식

운동에너지를 T, 위치에너지를 U라 할 때, 에너지보존의 법칙은 다음과 같다.

$$T + U = constant$$

또는

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0$$

그런데 $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U=\frac{1}{2}kx^2$ 이므로

$$m\ddot{x}+kx=0$$

2-1-3. 해

운동방정식 (1)을 풀기위하여 $x=Ce^{st}$ 를 가정하여 식 (1)을 대입하면

$$C(ms^2+k)=0$$

인데 C는 0이 될 수 없으므로

$$ms^2+k=0$$

이 되고, 따라서

$$s=\pm\sqrt{-\frac{k}{m}}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}=\pm i\omega_n \qquad \omega_n \text{ : 고유진동수}$$

이 된다. 즉 식 (1)의 해는

$$x(t)=C_1e^{i\omega_n t}+C_2e^{-i\omega_n t} \tag{2}$$

이 된다. 이는 다시

$$x(t)=A_1\sin\omega_n t+A_2\cos\omega_n t \tag{3}$$

로 표현할 수 있다. t=0에서 초기 속도 $\dot{x}(0)$과 초기변위 $x(0)$을 대입하면

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} sin\omega_n t + x(0)\cos\omega_n t$$

2-1-4. 조화운동

해 (3)의 형태는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \sin\omega_n t + A_2 \cos\omega_n t \\ &= A\cos(\omega_n t - \phi) \end{aligned} \tag{4}$$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$: 진폭

$\phi = \tan^{-1}(\frac{A_2}{A_1})$: 위상각

2-2. 비감쇠 비틀림계의 자유진동

질량 m -----> 극질량 관성모멘트 J_o
변위 x -----> 각변위 θ
스프링 k -----> 비틀림 스프링 k_t

2-3. 안정 조건

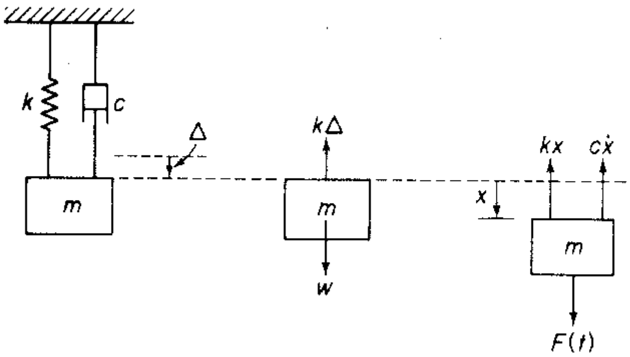
계의 운동방정식의 해가 시간이 증가함에 따라 변위나 각속도가 무한값으로 수렴하는 경우는 불안정하므로 안정적으로 진동이나 운동하는 조건을 의미한다. 즉 안정조건을 위배하면 기계시스템은 문제가 있다. 그러나 이를 판별하는 것은 간단한 시스템을 제외하고 복잡하므로 이론적 설명은 생략한다.

2-4. Rayleigh 에너지법

계가 조화운동을 하는 경우 비감쇠 진동은 에너지법으로부터 바로 고유진동수가 구해진다.

$$T_{\max} = U_{\max}$$

2-5. 점성 감쇠 자유진동(viscously damped free vibration)



(1) 점성 감쇠력

$F_d = c\dot{x}$ $\qquad$ c : 감쇠계수

(2) 운동방정식

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

(3) 자유 감쇠 진동 (free-damped vibration)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (5)$$

(4) Homogeneous Solution

$$x = Ce^{st}$$

를 운동방정식 (5)에 대입하면 특성방정식(characteristic equation)

$$(ms^2 + cs + k)e^{st} = 0$$

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

으로부터 일반해

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

를 얻는다 여기서,

$$s_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$s_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

(5) 임계감쇠상수 및 감쇠비

- Critical damping, c_c

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{mk}$$

- Damping ratio, ζ

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

- Characteristic roots

$$s_1 = \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$s_2 = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

- 감쇠 고유진동수 : $\omega_d = \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n$

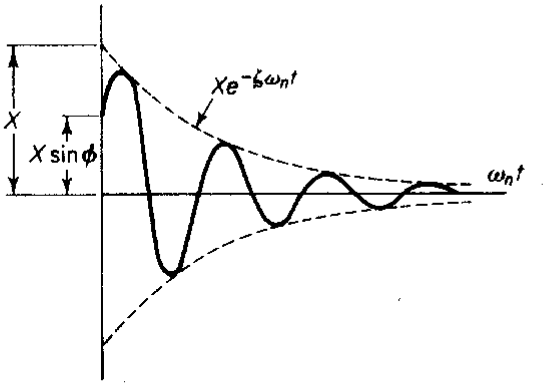
▸ 경우 1 : underdamped case, $\zeta < 1$

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left(C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t}\right)$$

$$= X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t - \phi_0)$$

초기조건을 대입하면

$$x = \ e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{\dot{x}(0)+\zeta\omega_n x(0)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + x(0)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)$$

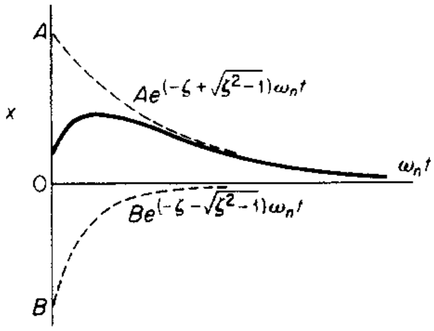


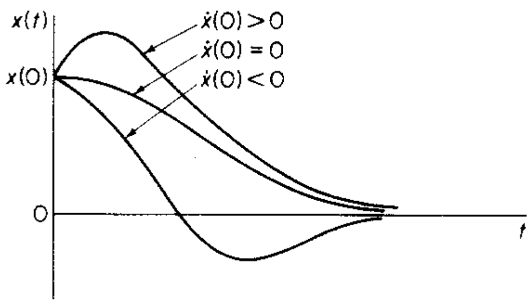
▸ 경우 2 : overdamped case, $\zeta > 1$

$$x = \left(C_1 e^{-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n t} + C_2 e^{-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n t}\right)$$

$$C_1 = \ \frac{\dot{x}(0) + (\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n x(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$C_2 = \ \frac{-\dot{x}(0) - (\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n x(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$





▸ 경우 3 : critical damped case, $\zeta = 1$

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

$$x = \left\{x(0) + [\dot{x}(0) + \omega_n x(0)]\, t\right\} e^{-\omega_n t}$$

임계 감쇠계와 과 감쇠계는 진동없이 $t \to \infty$ 이면 $x(t) \to 0$ 임을 명심하라.

(6) 대수적 감소율(Logarithmic decrement)

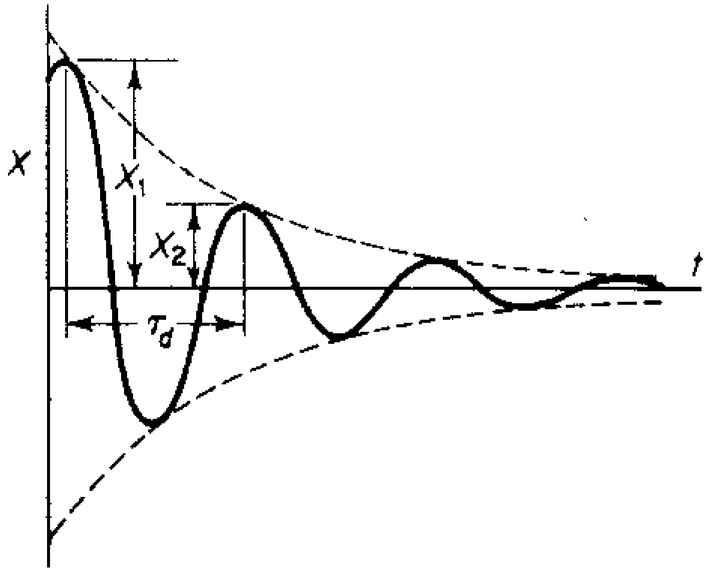
한주기당 두 진폭이 감소하는 빠르기를 나타내는 자연대수값

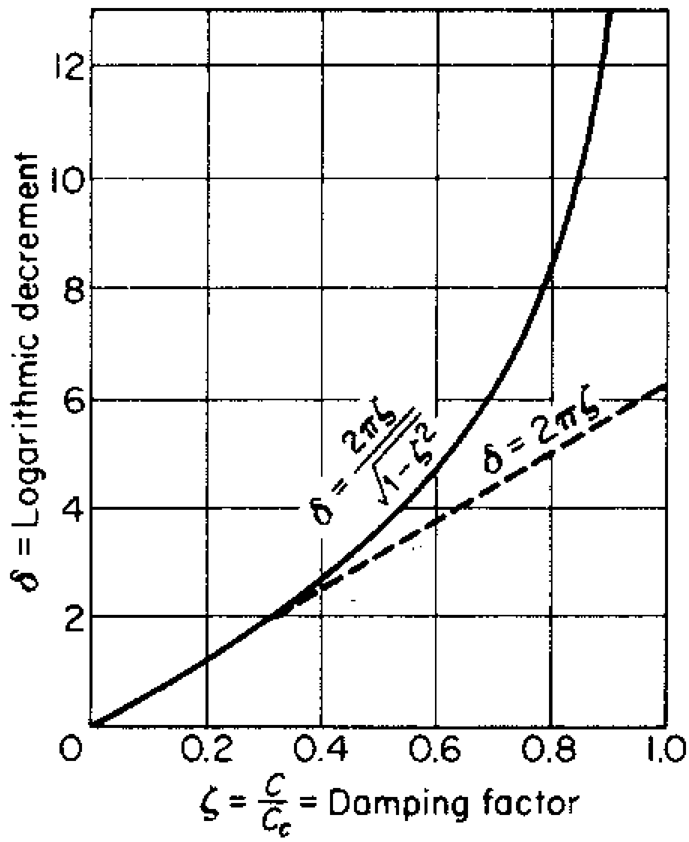
▸ 감쇠진동에 대한 일반해

$$x = X_0\, e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t - \phi_0\right)$$

▸ 대수적 감쇠율

$$\begin{aligned}
\delta &= \ln \frac{x_1}{x_2} \\
&= \ln \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1} \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t_1 - \phi_0\right)}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+\tau_d)} \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n (t_1+\tau_d) - \phi_0\right)} \\
&= \ln \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+\tau_d)}} \\
&= \ln e^{\zeta\omega_n \tau_d} \\
&= \zeta\omega_n \tau_d \\
&= \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \left(\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \right) \\
&\approx 2\pi\zeta \qquad \left(\zeta = \text{small},\ \sqrt{1-\zeta^2} \approx 1 \right)
\end{aligned}$$





실험적으로 δ를 구하는 방법

$$\delta = \frac{1}{m} ln \frac{x_1}{x_{m+1}}$$

(7) 점성 감쇠의 소산에너지

점성 감쇠기와 스프링이 병렬로 연결되어 있을 때 운동에 저항하는 전체힘은

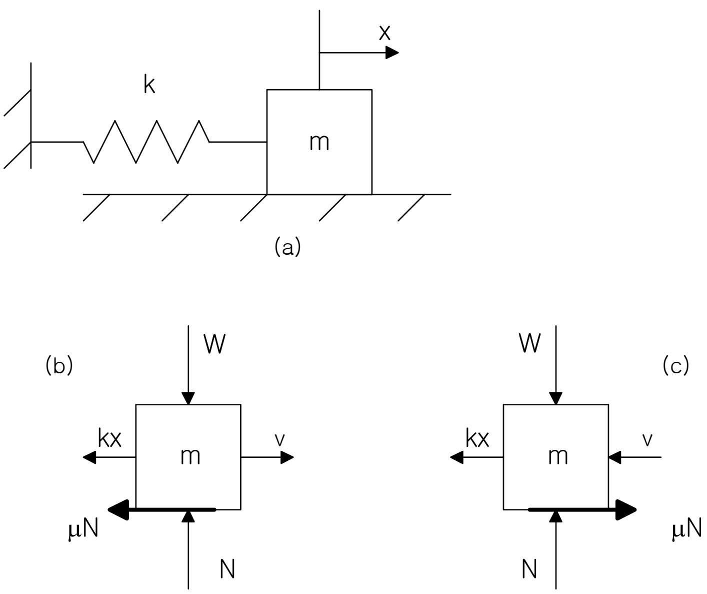
$$F = -kx - c\dot{x}$$

이다. 이때 $x = X\sin w_d t$의 단순 조화운동으로 가정하여 한사이클당 방출하는 에너지는

$$\Delta W = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega_d}} F\dot{x}\,dt = \pi c \omega_d X^2$$

2.6 쿨롱 감쇠(Coulomb damping)

- 두 개의 표면이 미끌어지면서 발생하는 감쇠
- 감쇠력은 법선력과 마찰계수 μ의 곱으로 표시
- 속도에 무관
- 감쇠력의 방향이 속도의 방향에 반대임
- 마찰력 $F = \mu N$



경우 1) 질량이 왼쪽에서 오른쪽으로 운동

$$m\ddot{x} = -kx - \mu N$$
$$m\ddot{x} + kx = -\mu N$$

Homogeneous Sol.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$x_h = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \qquad (\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

Nonhomogeneous Sol.

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N$$

$x_p = C$ (Undeterminated Coefficient Method)

$$\ddot{x}_p = 0$$

$kC = -\mu N$ 이므로 $L = -\dfrac{\mu N}{k}$

$$x_p = -\frac{\mu N}{k}$$

$$x = x_h + x_p$$
$$= A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t - \frac{\mu N}{k}$$

경우 2) 질량이 오른쪽에서 왼쪽으로 운동

$$m\ddot{x} = -kx + \mu N$$
$$m\ddot{x} + kx = \mu N$$
$$x = A_3\cos\omega_n t + A_4\sin\omega_n t + \frac{\mu N}{k}$$

설명)

$x(0) = x_o$ (+)

$\dot{x}(0) = 0$

1) 운동은 왼쪽에서 오른쪽으로 진행

$$x = A_3\cos\omega_n t + A_4\sin\omega_n t + \frac{\mu N}{k}$$

$$x(0) = x_o = A_3 + \frac{\mu N}{k}$$

$$A_3 = x_o - \frac{\mu N}{k}$$

$$\dot{x} = -A_3\omega_n\sin\omega_n t + A_4\omega_n\cos\omega_n t$$

$$\dot{x}(0) = 0 = A_4$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \left(x_o - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega_n t + \frac{\mu N}{k} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi/\omega_n)$$

a) $t = \dfrac{\pi}{\omega_n}$ 에서,

$$x(\pi/\omega_n) = \left(x_o - \frac{\mu N}{k}\right)\cos\pi + \frac{\mu N}{k}$$

$$= -\left(x_o - \frac{2\mu N}{k}\right) = -x_1$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n\left(x_o - \frac{\mu N}{k}\right)\sin\omega_n t$$

$$\dot{x}(\pi/\omega_n) = -\omega_n\left(x_o - \frac{\mu N}{k}\right)\sin\pi = 0$$

2) 운동이 오른쪽에서 왼쪽으로 진행 ($\dfrac{\pi}{\omega_n} \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{\omega_n}$)

$$x(t) = A_1\cos\omega_n\left(t - \frac{\pi}{\omega_n}\right) + A_2\sin\omega_n\left(t - \frac{\pi}{\omega_n}\right) - \frac{\mu N}{k}$$

a) $t = \dfrac{\pi}{\omega_n}$ 에서,

$$A_1 - \frac{\mu N}{k} = -\left(x_o - \frac{2\mu N}{k}\right)$$

$$A_1 = -x_o + \frac{3\mu N}{k}$$

$$\dot{x}(t) = -A_1\omega_n \sin\omega_n (t - \frac{\pi}{\omega_n})$$

$$+ A_2\omega_n \cos\omega_n (t - \frac{\pi}{\omega_n})$$

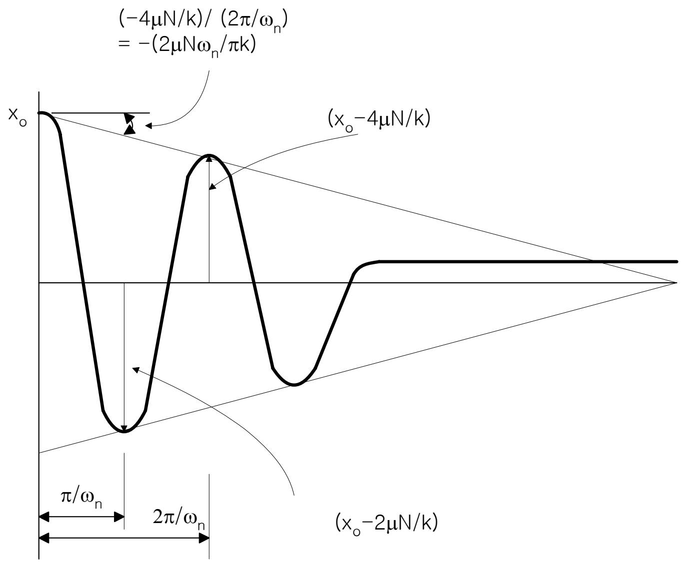
$$A_2 = 0$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-x_o + \frac{3\mu N}{k}\right)\cos\omega_n (t - \frac{\pi}{\omega_n}) - \frac{\mu N}{k} \\ &= \left(-x_o + \frac{3\mu N}{k}\right)\cos(\omega_n t - \pi) - \frac{\mu N}{k} \\ &= -\left(-x_o + \frac{3\mu N}{k}\right)\cos\omega_n t - \frac{\mu N}{k} \\ &= \left(x_o - \frac{3\mu N}{k}\right)\cos\omega_n t - \frac{\mu N}{k} \qquad (\frac{\pi}{\omega_n} \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\omega_n}) \end{aligned}$$

b) $t = \frac{2\pi}{\omega_n}$ 에서,

$$\begin{aligned} x(2\pi/\omega_n) &= \left(x_o - \frac{3\mu N}{k}\right) - \frac{\mu N}{k} \\ &= x_o - \frac{4\mu N}{k} \end{aligned}$$

$$\dot{x}(2\pi/\omega_n) = 0$$



운동이 멈출때 까지 경과한 반 사이클 수가 r 일 때,

진폭은 $x_o - \frac{r\mu N}{k}$

스프링 힘은 $k(x_o - \frac{r\mu N}{k})$

따라서

$$k(x_o - \frac{r\mu N}{k}) \leqq \mu N$$

$$r \geqq \left[\frac{x_o - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}} \right]$$

쿨롱 감쇠의 특징

1) 연속하는 두 사이클 끝에서의 진폭사이의 관계식은

$$X_m = X_{m-1} - \frac{4\mu N}{k}$$

2) 감소하는 직선의 기울기는

$$-(\frac{4\mu N}{k})/(\frac{2\pi}{\omega_n}) = -\frac{2\mu N\omega_n}{\pi k}$$

3) 고유 진동수는 변하지 않는다.

4) 일정시간이 경과하면 운동이 멈춘다. 그때까지의 반 사이클 수(r)는

$$r \geqq \left[\frac{x_o - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}} \right]$$

2.7 이력 감쇠 자유진동

재료가 변형할 때 미끄러지는 내부 평면 사이의 마찰로 발생하는 감쇠

▸ 진동수 ω와 진폭 X로 운동하는 점성 감쇠의 한주기마다 방출되는 에너지

$$\Delta W = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} F\dot{x}\,dt = \pi c \omega X^2$$

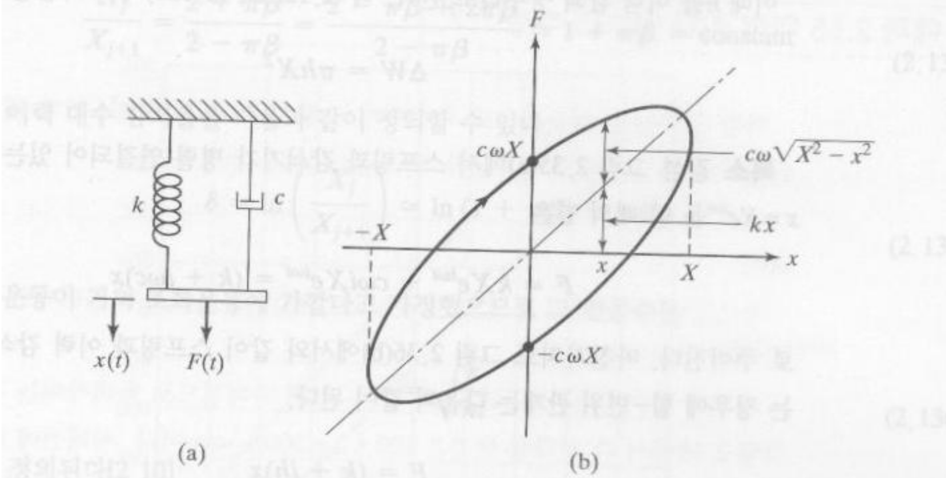


그림 2.35 스프링-점성감쇠기 시스템

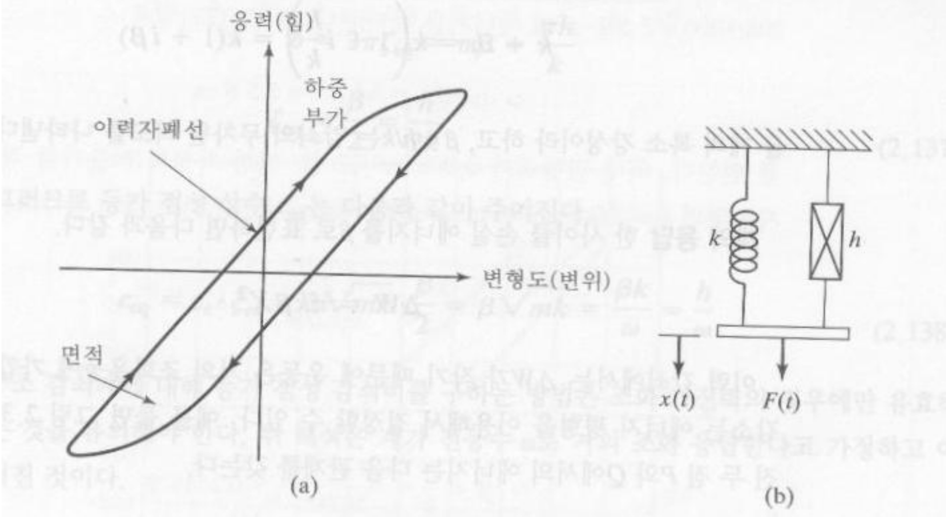


그림 2.36 이력 자폐선

▸ 진동수 ω와 진폭 X로 운동하는 이력 감쇠의 한주기마다 방출되는 에너지는 이력 자폐선의 면적이 되며 실험적 고찰에 의하여

$$\Delta W = \pi h X^2$$

그러므로 상당 점성 감쇠 계수는

$$c = \frac{h}{\omega}$$

(1) 복소 강성

일반 조화운동 $x = Xe^{i\omega t}$을 할 때

$$F = kx + c\dot{x} = kXe^{i\omega t} + c\omega i Xe^{i\omega t} = (k + i\omega c)x$$

이므로 이력 감쇠의 경우

$$F = (k + i\omega c)x = (k + ih)x = k(1 + i\beta)$$

$k(1+i\beta)$: 계의 복소 강성

$$\Delta W = \pi h X^2 = \pi k \beta X^2$$

(2) 계의 응답

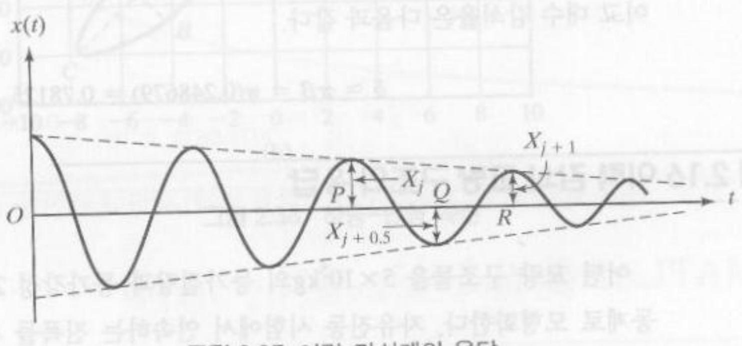


그림 2.37 이력 감쇠계의 응답

이력감쇠에서 반주기 떨어진 두점 P와 Q에서의 에너지는

$$\frac{kX_j^2}{2} - \frac{\pi k \beta X_j^2}{4} - \frac{\pi k \beta X_{j+0.5}^2}{4} = \frac{kX_{j+0.5}^2}{2}$$

이를 정리하면

$$\frac{X_j}{X_{j+0.5}} = \sqrt{\frac{2+\pi\beta}{2-\pi\beta}}$$

그러므로

$$\frac{X_j}{X_{j+1}} = \frac{2+\pi\beta}{2-\pi\beta} \simeq 1+\pi\beta$$

이력 대수 감쇠율

$$\delta = \ln\frac{X_1}{X_2} \simeq \ln(1+\pi\beta) \simeq \pi\beta$$

등가 점성 감쇠비

$$\delta \simeq 2\pi\zeta_{eq} \simeq \pi\beta = \frac{\pi h}{k} \qquad \zeta_{eq} = \frac{\beta}{2}$$

이 방법은 조화 가진력만 유효하다.