5.3 소성응력-변형률 관계

cf) 탄성변형률 - Hooke의 법칙에 따라 응력에 의해 결정되는 유일한 값
→ 변형경로는 X

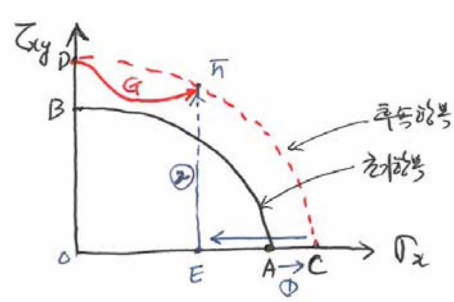
- 소성 범위 변형률 → 응력상태에 딸서 유일하게 결정되는 것이 아니고 응력경로에 따라 달라짐.

소성변형
$(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0)$
$\nu = 0.5$
$\rightarrow 0.5 = \left|\frac{\epsilon_y^p}{\epsilon_x^p}\right| = \left|\frac{\epsilon_z^p}{\epsilon_x^p}\right|$

- CASE 1

①: ϵ_x^p

$$\epsilon_y^p = \epsilon_z^p = -\epsilon_x^p/2 \quad \text{——} \; (\ast)$$
$$\gamma_{xy}^p = \gamma_{yz}^p = \gamma_{zx}^p = 0$$



②: i) 응력경로 : C점에서 E점으로 인장하중을 줄이고 전단응력을 O에서 F점까지 올림(탄성거동 상태) ⇒ 만들어진 소성변형에 영향을 못줌

ii) 변형률 : 초기항복 이후 후속항복이 된 상태(A→C) 이후에 다시 항복이 된 것이 없으므로 소성변형률은 (∗)와 동일함.(나머지 경로는 모두 탄성상태)
→ 후속항복곡선 밖으로 나가지만 않으면 동일한 소성변형률 상태 (O → C → F)

- CASE 2

① : i) 응력경로 : B → D , 전단응력 부가

ii) 변형률 : γ_{xy}^p —— (∗ ∗)

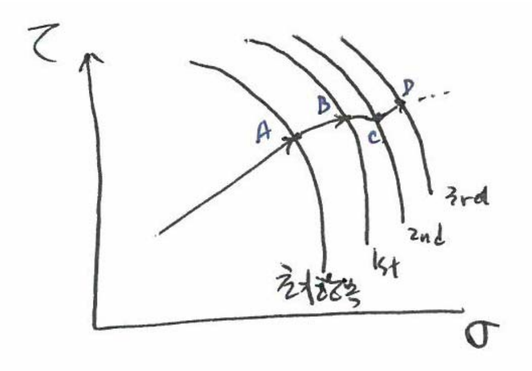
$$\epsilon_x^p = \epsilon_y^p = \epsilon_z^p = \gamma_{yz}^p = \gamma_{zx}^p = 0$$

② : i) 응력경로 : D → G → F

ii) 변형률 : D에서 F에 도달하는 동안 새롭게 항복이 일어나지 않음 (탄성거동 영역 : G)
→ 따라서 (∗ ∗) 소성 변형률 상태는 그대로 유지

⇒ 여기서, 최종응력상태(F)는 동일하지만 응력 경로에 따라 소성변형률이 다름$(\ast) \neq (\ast\ast)$

- 이와 같이 소성변형률은 응력경로 의존하므로 응력경로의 전과정을 통해 소성변형률 증분의 변화상황을 파악하여 이를 적분하여 소성 전변형률을 결정해야 함.

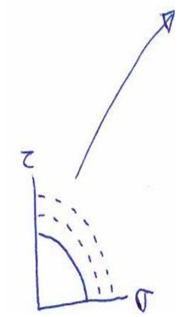


total strain: $\epsilon = \int_{1}^{1\frac{1}{4}} \frac{dl}{l} + \int_{1\frac{1}{4}}^{1} \frac{dl}{l} = 0$

변형률증분: $\epsilon = \int_{1}^{1\frac{1}{4}} \frac{dl}{l} + \int_{1\frac{1}{4}}^{1} \left(-\frac{dl}{l}\right) = 2\ln\frac{5}{4} = 0.445$

5.3.1 Prandtl - Reuss의 식 (elastic-perfectly plastic material)

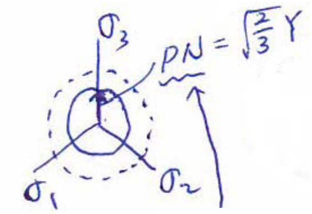
- 변형의 각 순간에서 소성변형량증분이 편차응력 및 전단응력에 비례(가정)



등방경화특성

- 등방-경화 특성

$$\frac{d\epsilon_x^p}{{\sigma_x}'} = \frac{d\epsilon_y^p}{{\sigma_y}'} = \frac{d\epsilon_z^p}{{\sigma_z}'} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^p}{\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{\tau_{xy}} = d\lambda \quad \text{—— ①}$$



편차응력에 영향

$$\therefore\ \underline{d\epsilon_{ij}^p = {\sigma_{ij}}' d\lambda} \quad \text{—— ②}$$

① $d\lambda$: 비례계수(+값), 변형과정을 따라 달라짐

② 주응력과 변형률증분의 주축은 일치

- total strain increment(전변형률 증분)

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^e = {\sigma_{ij}}' d\lambda + \underline{\left(\frac{d{\sigma_{ij}}'}{2G} + \frac{1-2\nu}{E}\delta_{ij} d\sigma_m\right)} \quad \text{—— ③}$$

└ from 일반화된 $Hooke's\,law$

$= (\sigma_{ij}/2G) + \frac{1-2\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_m$

- 소성변형 → 비압축성 과정

$$d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p = d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p = 0 \qquad \text{or}\ \ d\epsilon_{ij}^p = 0$$

- from ②

$$
\begin{aligned}
d\epsilon_x^p &= \sigma_x{}' d\lambda \\
&= d\lambda\left[\sigma_x - \sigma_m\right] \\
&= d\lambda\left[\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}\right] \\
&= d\lambda\left[\frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3}\right] \\
&= d\lambda\left[\frac{2}{3}\left(\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right)\right] \\
&= \frac{2}{3} d\lambda\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right]
\end{aligned}
$$

- 따라서, 전변형률 증분은

$$
\begin{aligned}
d\epsilon_x &= d\epsilon_x^p + d\epsilon_x^e = \frac{2}{3} d\lambda\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \frac{d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)}{E} \\
d\epsilon_x &= \frac{2}{3} d\lambda\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \frac{d\sigma_y - \nu(d\sigma_x + d\sigma_z)}{E} \\
d\epsilon_x &= \frac{2}{3} d\lambda\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \frac{d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)}{E} \\
d\gamma_{yz} &= \tau_{yz} d\lambda + \frac{d\tau_{yz}}{2G} \\
d\gamma_{zx} &= \tau_{zx} d\lambda + \frac{d\tau_{zx}}{2G} \\
d\gamma_{zx} &= \tau_{zx} d\lambda + \frac{d\tau_{zx}}{2G}
\end{aligned}
$$

⇒ 소성변형률 증분 + 탄성변형률 증분으로 표현

※이유 : 응력의 변화량으로 인해 항복이 일어났는지에 대하여 매번 체크를 해야 함

→ 탄소성체에 대한 식 ⇒ 현실적으로 적용하기가 어렵다.

→ 강-완전소성체로 가정(탄성상태: 변형률 = 0)

(전변형률 증분=소성변형률 증분)

5.3.2 Levy-Mises의 식 (강-완전소성재료) (rigid-perfectly plastic)

- 변형률 증분과 편차응력 사이의 관계

$$\frac{d\epsilon_x}{\sigma_x{}'} = \frac{d\epsilon_y}{\sigma_y{}'} = \frac{d\epsilon_z}{\sigma_z{}'} = \frac{\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = d\lambda$$

$$\therefore\ d\epsilon_{ij} = \sigma_{ij}{}' d\lambda$$

→ 전변형률 증분과 소성변형률 증분 일치

→ Prantdel-Reuss 식의 특별한 형태

→ 탄성회복 등을 계산하기에 부적합

$$\left.\begin{aligned}
d\epsilon_x &= \sigma_x{}' d\lambda \\
&= \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\
d\epsilon_y &= \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\
d\epsilon_z &= \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\
d\epsilon_{xy} &= d\lambda \sigma_{xy} \\
d\epsilon_{yz} &= d\lambda \sigma_{yz} \\
d\epsilon_{zx} &= d\lambda \sigma_{zx}
\end{aligned}\right] \quad \text{—— ①}$$

- 비례계수 $d\lambda$ 계산 → 유효변형률 $\bar{\epsilon}$ 이용(유효응력 $\bar{\sigma}$에 텐서이므로 ϵ_{ij} 대입)

$$d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(d\epsilon_x - d\epsilon_y)^2 + (d\epsilon_y - d\epsilon_z)^2 + (d\epsilon_z - d\epsilon_x)^2 + 6\left(d\epsilon_{xy}^2 + d\epsilon_{yz}^2 + d\epsilon_{zx}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

—— ②

① → ② 대입

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{3}d\lambda\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\sigma_{xy}+\sigma_{yz}+\sigma_{zx})\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\therefore d\bar{\epsilon} = \frac{2}{3}d\lambda\bar{\sigma}$$

$$\therefore d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}$$

따라서 식 ①은,

$$d\epsilon_x = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right]$$

$$d\epsilon_y = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z)\right]$$

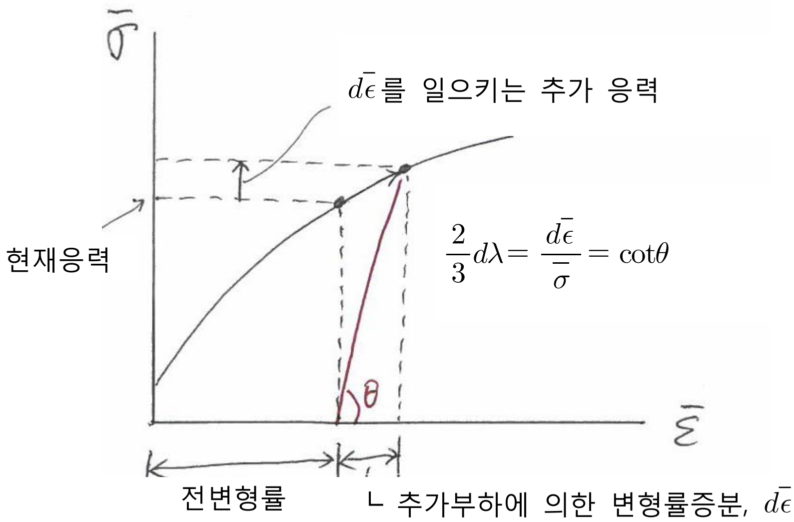
$$d\epsilon_z = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\right]$$

$$d\epsilon_{xy} = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}\sigma_{xy}$$

$$d\epsilon_{yz} = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}\sigma_{yz}$$

$$d\epsilon_{zx} = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}\sigma_{zx}$$

(※ $\frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}$: 유효응력-유효변형률 선도에서 구해짐)



$$d\bar{\epsilon} = \boxed{\frac{2}{3}d\lambda}\bar{\sigma}$$

→일정한 값이 아님
($\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ 기울기가 변함)

- Hooke의 법칙과 비교

- $\epsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$
  - $\frac{1}{E}$: 일정
- $d\epsilon_x = \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right]$
  - $\frac{2}{3}d\lambda$: 경로에 따라 변함
  - Levy-Mises 식에서는 $d\epsilon_x = d\epsilon_x^p$

＊ 전변형률 이론(total strain theory) - Hencky's theory

→ 탄성의 전변형률 이론을 소성의 문제에 확장한 것

$$\epsilon_{ij}^{p}\,\text{(total 소성변형률)} = \phi\sigma_{ij}{}'$$

: 소성변형률의 주축이 항상 응력의 주축과 일치하고 소성변형률의 성분이 편차응력 성분에 비례한다.

→ 소성변형률 증분이 안고 전체 소성변형률과 편차응력 성분과 대응

- Prandtl-Reuss 식에서

$$d\epsilon_x = d\epsilon_x^p + d\epsilon_x^e = \frac{d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)}{E} + \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \text{ — ①}$$

- Levy-Mises 식에서 구한 $d\lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\epsilon}^{\,p}}{\bar{\sigma}}$ 를 대입하면,

$$\text{① : } d\epsilon_x = \frac{d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)}{E} + \cancel{\frac{2}{3}} \cdot \cancel{\frac{3}{2}}\,\frac{d\bar{\epsilon}^{\,p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \text{ —— ②}$$

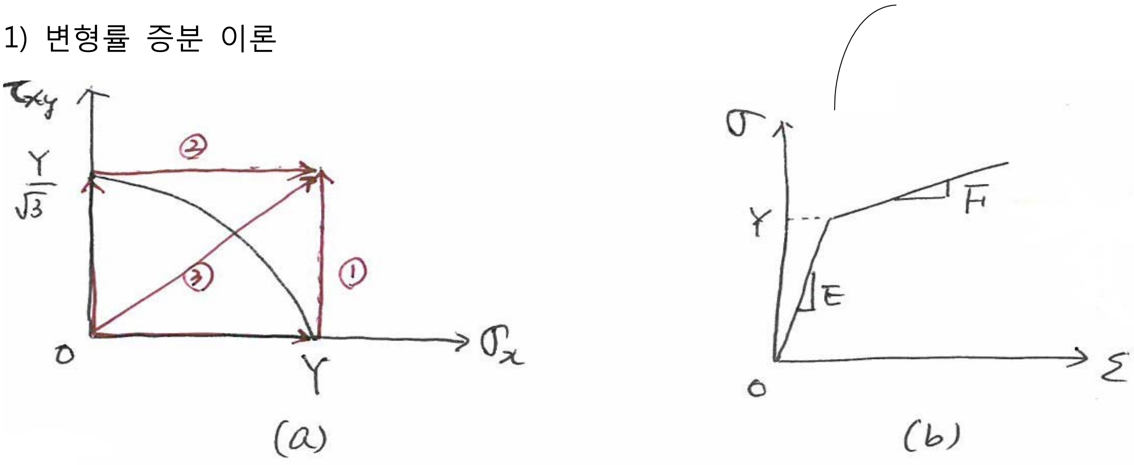
- 전변형률 개념 적용

$$\text{② : } \therefore\ \underbrace{\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} + \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right]\frac{\bar{\epsilon}^{\,p}}{\bar{\sigma}}}_{x\text{ 방향 전변형률}} \text{ —— ③}$$

→ 응력과 변형률의 비가 일정할 때 성립되는 수식

5.7 변형률 증분 이론과 전변형률 이론에 의한 비교

1) 변형률 증분 이론



(b) 그림에서 응력-변형률 곡선은,

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} + \frac{\sigma_t - Y}{F} \qquad \text{—— ①}$$

- $\bar{\sigma} = \left[\frac{1}{2}\left(2\sigma_x^2 + 6\tau_{xy}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (← σ_x, τ_{xy}만 존재)

- 따라서 $d\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma_x d\sigma_x + 3\tau_{xy} d\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}}$

- 증분이론에서 (앞의 전변형률 증분 이론 ②식 참고)

$$d\epsilon_x = \frac{d\sigma_x}{E} + \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}}\sigma_x \qquad \text{—— ②}$$

- $d\bar{\epsilon}^p = d\bar{\sigma}/F$ 이므로

② : $d\epsilon_x = \dfrac{d\sigma_x}{E}$(탄성) + $\dfrac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}}\dfrac{\sigma_x}{F}$(소성)

$$= \frac{d\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_x\left(\sigma_x d\sigma_x + 3\tau_{xy} d\tau_{xy}\right)}{F\left(\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2\right)} \qquad \text{—— ③}$$

- 증분 이론 → 전체 변형률을 구하기 위해서는 식 ③을 변형률 경로에 따라 적분 해야 함.

①의 경로,

i) 응력 : O → Y 인장(τ_{xy}=0), → $\dfrac{Y}{\sqrt{3}}$ (전단) (이 구간에서는 $d\sigma_x = 0, \sigma_x = Y$)

$$\epsilon_x = \frac{Y}{E} + \frac{Y}{F}\int_0^{\frac{Y}{\sqrt{3}}} \frac{3\tau_{xy}d\tau_{xy}}{Y^2 + 3\tau_{xy}^2} = \frac{Y}{E} + \frac{Y}{F} ln\sqrt{2}$$

$$= \frac{Y}{E} + 0.346\frac{Y}{F}$$

②의 경로,

i) 응력 : O → $\dfrac{Y}{\sqrt{3}}$ 전단(σ_x=0), → Y 인장($d\tau_{xy}$=0), $\tau_{xy} = \dfrac{Y}{\sqrt{2}}$로 유지

$$\epsilon_x = \int_0^Y \frac{d\sigma_x}{E} + \frac{1}{F}\int_0^Y \frac{3\sigma_x d\sigma_x}{\sigma_x^2 + Y^2} = \int_0^Y \frac{d\sigma_x}{E} + \frac{1}{F}\int_0^Y \left(1 - \frac{Y^2}{\sigma_x^2 + Y^2}\right) d\sigma_x$$

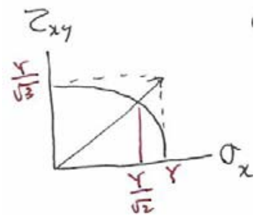
$$= \frac{Y}{E} + \frac{Y}{F}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{Y}{E} + 0.125\frac{Y}{F}$$

③의 경로,

i) 응력 : $\dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 의 비율로 증가 $\therefore\ \tau_{xy} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_x$ → 식 ③에 대입

$$d\epsilon_x = \frac{d\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_x(\sigma_x d\sigma_x + \sigma_x d\sigma_x)}{F(\sigma_x^2 + \sigma_x^2)}$$

$$= \frac{d\sigma_x}{E} + \frac{d\sigma_x}{F}$$



$$\epsilon_x = \int_0^Y \frac{d\sigma_x}{E} + \int_{\frac{Y}{\sqrt{2}}}^Y \frac{d\sigma_x}{F} = \frac{Y}{E} + \frac{Y}{F}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{Y}{E} + 0.293\frac{Y}{F}$$

$\ast$ $\dfrac{Y}{\sqrt{2}}$ 구하기

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \qquad \leftarrow \text{대입 } \tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_x$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2} = \sqrt{2}\,\sigma_x = Y$$

$$\therefore\ \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}Y$$

- ①, ②, ③의 경로에 따른 변형경로 적분값이 모두 차이가 남.
  → 경로에 따라 소성변형률의 차이로 인해

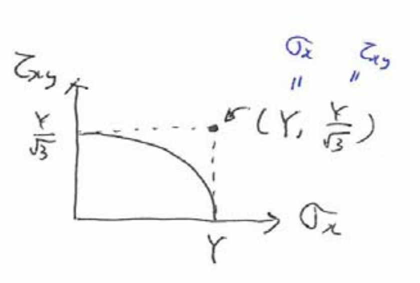
2) 전변형률 이론(적분 불필요)
  - 전변형률 이론에서

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} + \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right]\frac{\bar{\epsilon}^{\,p}}{\bar{\sigma}} \qquad (\leftarrow \sigma_x, \tau_{xy}\text{만 고려 })$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \sigma_x\frac{\overline{\epsilon^p}}{\bar{\sigma}} \qquad \left(\leftarrow \frac{\bar{\sigma} - Y}{F} = \bar{\epsilon}^{\,p}\right)$$

$$= \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_x}{F}\left(1 - \frac{Y}{\bar{\sigma}}\right)$$

$$= \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_x}{F}\left(1 - \frac{Y}{\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}}\right) \quad \Leftarrow$$



$$\epsilon_x = \frac{Y}{E} + \frac{Y}{F}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{Y}{E} + 0.293\frac{Y}{F}$$

→ ③번 경로 값과 동일

  : 전변형률 이론은 부하조건이 비례적인 경우에 해당