2. 1 지수함수와 로그함수

밑(base) 지수 (exponent, power)

a^n → a의 n 제곱 :어떤 수 a를 n번 반복하여 곱한것

지수함수

$$f(x) = a^x$$

역함수

로그함수

$$f(x) = \log_a x$$

→ 밑이 a인 x의 로그함수

a > 0, b > 0 임의의 유리수 m, n에 대하여
다음의 지수법칙이 성립

$$(1)\quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(2)\quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(3)\quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$(4)\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(5)\quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Review

실수 = 유리수 + 무리수
유리식 = 정식 +분수식
정식 = 자연수와
이들의 음수 그리고 0
무리수 = 실수 - 유리수

거듭제곱근

$a > 0,\ b > 0$이고 $m,\ n$이 양의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　　④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

예제 1 다음 각 값을 구하여라.

(1) $\left(-\frac{64}{27}\right)^{2/3}$

(2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$

(3) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

[풀이] (1) $\left(-\frac{64}{27}\right)^{2/3}=\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^3\right\}^{\frac{2}{3}}=\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

(2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}=\sqrt[3]{\frac{2}{54}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{1}{3}$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{1}{-\frac{1}{3^3}}=\frac{1}{-\frac{1}{27}}=-27$ ⋯o

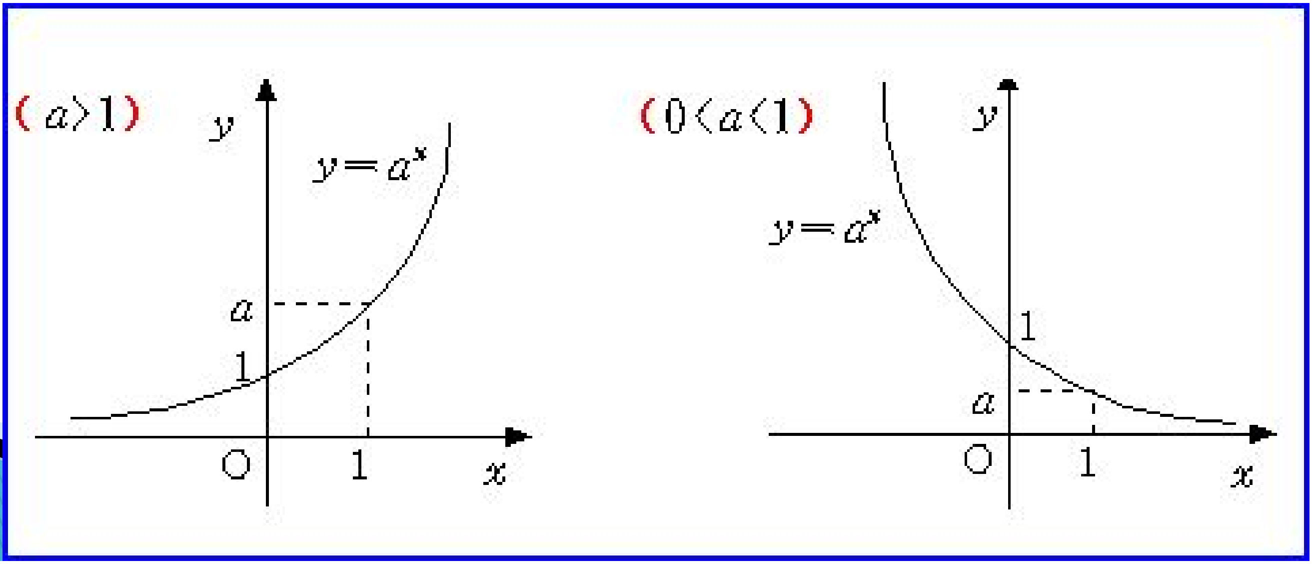
지수함수의 그래프

$y = a^x$

(1) $0 < a < 1$이면, x가 증가함에 따라 y는 감소하고, $x \to \infty$이면 $y \to 0$(x축 점근선)이고

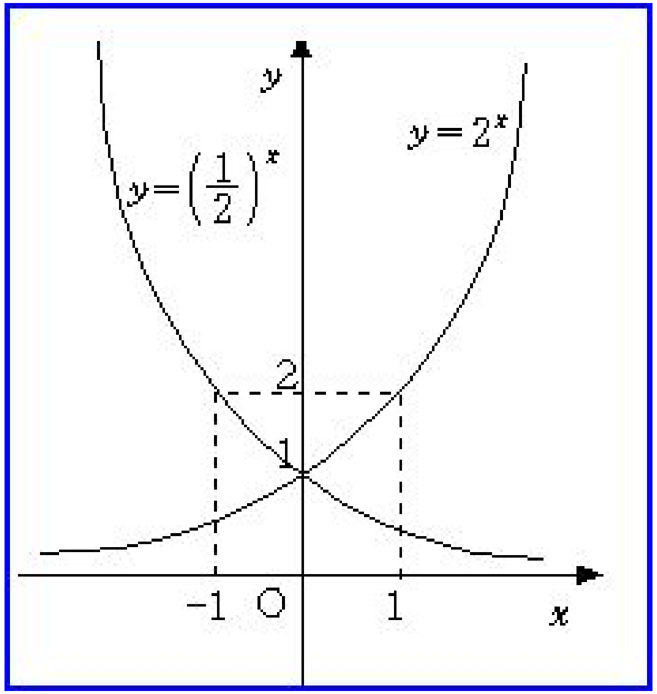
(2) $a > 1$이면, x가 증가함에 따라 y도 증가하고, $x \to -\infty$이면 $y \to 0$(x축 점근선)이다.

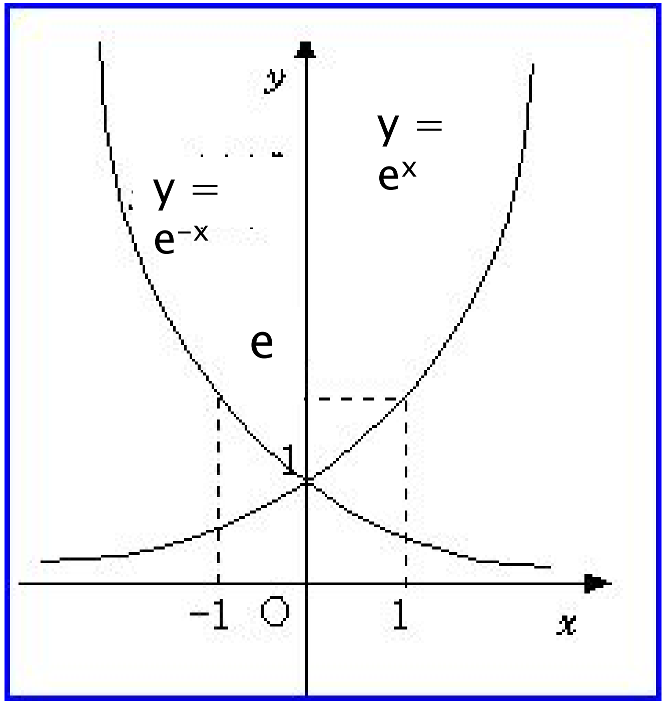
또한 임의의 상수 a에 대하여 $a^0 = 1$이므로, (1)과 (2)의 경우에 대하여 $y = a^x$은 y축 절편점 $(0, 1)$을 지난다.



$y = e^x$

-무리수 e를 밑으로 가지는 지수함수
-자연지수함수 (natural exponential function)





지수함수 그래프 $(y = a^x)$의 평행이동

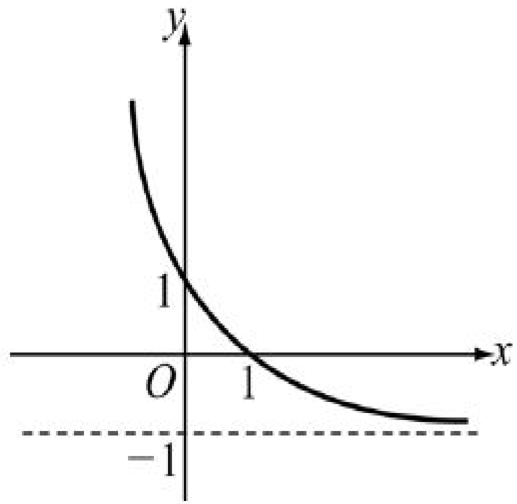
$y = a^x + c$ → y 축을 따라 c 만큼 평행 이동

$y = a^{x-c}$ → x 축을 따라 오른쪽으로 c 만큼 평행이동

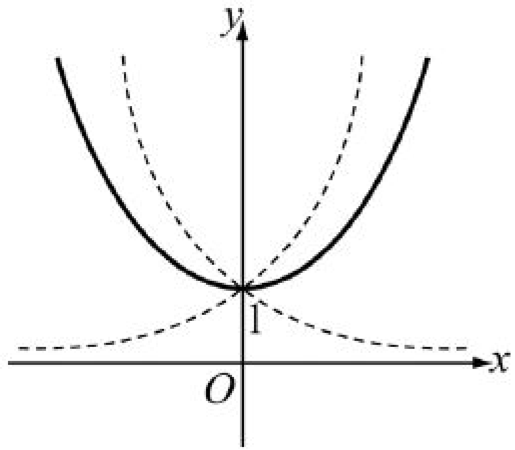
예제 2 다음 지수함수의 그래프를 그려라.

(1) $y = 2^{1-x} - 1$ (2) $y = \frac{1}{2}(3^{x} + 3^{-x})$

[풀이] (1) $y=2^{1-x}-1$의 그래프는 $y=2^{-x}$의 그래프를 x축 방향으로 $+1$, y축 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다.



(2) $y_1 = 3^x$, $y_2 = 3^{-x}$으로 놓고 y_1, y_2의 그래프를 각각 그린 다음 임의의 x에 대한 두 그래프의 중간점들을 잡아 곡선으로 잇는다.



$\cdots$ ❍

예제 1 지수방정식 $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$을 풀어라.

예제 1 지수방정식 $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$을 풀어라.

[풀이] $4^x - 2^{x+2} - 32 = (2^x)^2 - 4(2^x) - 32 = (2^x + 4)(2^x - 8) = 0$에서 $2^x > 0$

이므로 $2^x = 8 = 2^3$.

따라서 $x = 3$ ⋯o

지수함수

$f(x) = a^x$

역함수

로그함수

$f(x) = \log_a x$ → 밑이 a인 x의 로그함수

$2^3 = 8$ → 지수식을 동치인 로그 식으로 → $\log 2^3 = 3$ → $3 = \log_2 8$

* 밑이 10인 로그 → 상용로그(common logarithm)
밑이 e인 로그 → 자연로그(natural logarithm)
($y = \log_e x$ → $y = \ln x$)

- $a > 0$ → $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$

지수함수

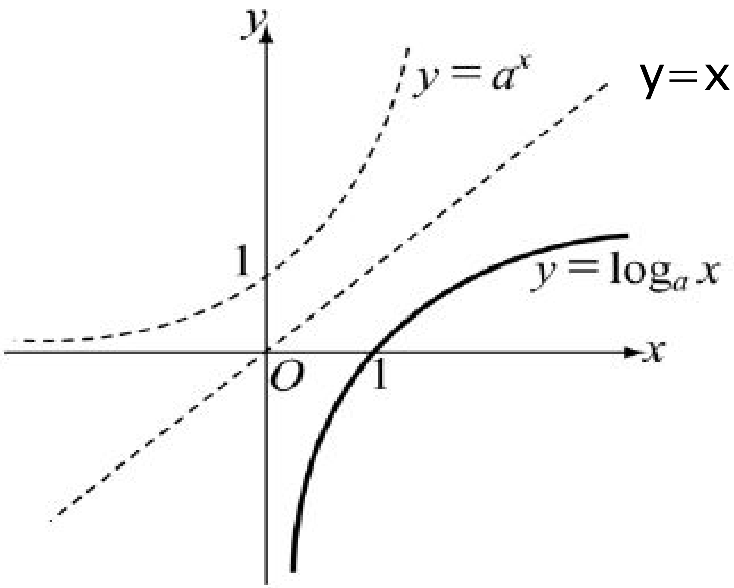
$f(x) = a^x$

역함수

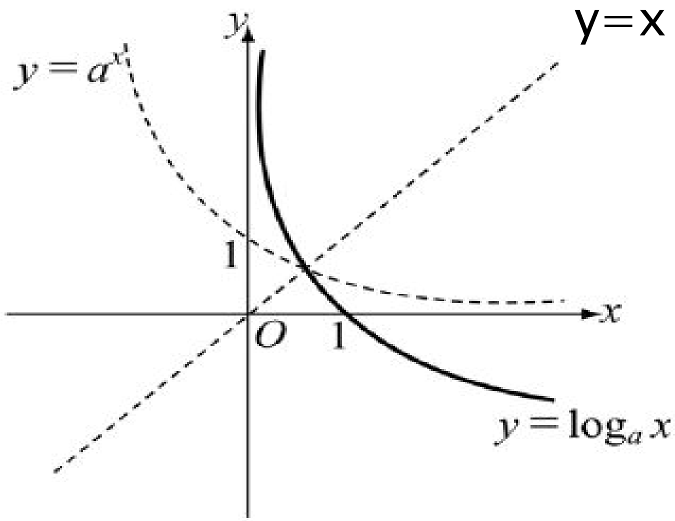
로그함수

$f(x) = \log_a x$

$(a > 1)$



$(0 < a < 1)$



로그의 성질

$a > 0,\ a \neq 1,\ A > 0,\ B > 0$이고 r가 실수일 때,

① $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

② $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

③ $\log_a A^r = r \log_a A$

예제 1 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_3 12 + \log_3 9 - \log_3 4$ (2) $\frac{1}{2}\log_2 5 - \log_2 \frac{\sqrt{5}}{4}$

[풀이] (1) $\log_3 12 + \log_3 9 - \log_3 4 = \log_3 \dfrac{12 \cdot 9}{4}$

$$= \log_3 27$$

$$= \log_3 3^3$$

$$= 3$$

(2) $\dfrac{1}{2}\log_2 5 - \log_2 \dfrac{\sqrt{5}}{4} = \log_2 \sqrt{5} - (\log_2 \sqrt{5} - \log_2 4)$

$$= \log_2 2^2$$

$$= 2$$

$\cdots$ ○

로그의 밑을 다른 수로 바꿀 때

$a>0,\ a\neq 1$이고 $b>0$일 때,

④ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}\,(c>0,\ c\neq 1)$

⑤ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}\,(b\neq 1)$

기타 로그의 성질

⑥ $a^{\log_a b} = b,\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

⑦ $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$

예제 2 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$라 할 때, $\log_6 5$를 a, b로 나타내어라.

[풀이] $\log_6 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 6}$

$$= \frac{\log_{10} \dfrac{10}{2}}{\log_{10}(2 \cdot 3)}$$

$$= \frac{\log_{10} 10 - \log_{10} 2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}$$

$$= \frac{1-a}{a+b}$$ ⋯ ㅇ