제 12 장 편미분법

제 12 장 편미분법

독립변수의 수가 둘 이상인 경우에는 도함수 대신 편도함수를 이용하여 함수의 변화율을 나타냄. 독립함수 상호간에 서로 영향을 미친다고 생각되는 경우에는 전도함수라는 또 다른 도함수의 개념을 이용함. 본장에서는 이처럼 다변수함수의 분석에 필수적인 도구로 사용되는 편도함수, 전미분, 전도함수의 개념을 중점적으로 학습함

제 1 절 편도함수의 개념

- n개의 변수, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 의 함수인 $y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$이 주어져 있으며 이들 x_i 변수들은 상호독립적일 때, 변수 x_1이 Δx_1만큼 변화한다면 이에 대응하는 y값의 평균변화율은 다음과 같음

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)-f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)}{\Delta x_1}$$

- 만약 $\Delta x_1 \to 0$일 때의 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x_1}$의 극한값이 존재한다면, 바로 이것이 x_1에 대한 y의 편도함수(partial derivative)가 되며, $\dfrac{dy}{dx}$ 대신에 다음과 같이 표기

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} y, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$y = f(u, v, w)$라면

$$\frac{\partial y}{\partial u} = f_u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = f_v, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = f_w$$

일반적으로 생산에 투입되는 요소는 크게 자본(K)과 노동(L)으로 나누어진다. 생산함수 중 가장 널리 알려진 것으로는 다음과 같이 정의되는 콥-더글러스(Cobb-Douglas) 함수를 들 수 있다.

$$Q = f(K,\ L) = AK^{\beta}L^{1-\beta} \quad (0 < \beta < 1)$$

(a) 만약 자본재의 투입량을 고정시키고 노동만을 증가시킨다면 산출량은 어떻게 변화할 것인가?

(b) 노동의 투입량이 증가할 때 노동의 한계생산물은 어떻게 변화할 것인가?

(a) 노동의 한계생산물을 MP_L 이라 하면

$$MP_L = \frac{\partial f}{\partial L} = A(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta}$$

이므로, $A>0$, $0<\beta<1$ 인 사실을 감안한다면 $MP_L>0$ 임을 알 수 있다. 즉, 노동의 증가에 따라 산출량도 증가한다.

(b) 노동의 증가에 따른 한계생산물의 변화는

$$\frac{\partial(MP_L)}{\partial L} = -A\beta(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta-1}$$

인데 $0<\beta<1$ 이므로 $\frac{\partial(MP_L)}{\partial L}<0$, 즉 노동의 한계생산물은 감소한다. 이를 한계생산물체감의 법칙이라고 한다.

제 2 절 미분과 전미분

1 미 분

- x가 Δx만큼 변할 때 y가 Δy만큼 변한다고 한다면 Δy는 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$\Delta y \equiv \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x$$

- Δx와 Δy가 아주 작은 값이라면 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$는 결국 도함수인 $\dfrac{dy}{dx}$가 될 것이며, Δx와 Δy 대신에 dx와 dy를 사용한다면(dx와 dy를 x와 y의 미분(differentials)이라 부름)

$$dy \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)dx \quad \text{또는} \quad dy \equiv f'(x)dx$$

2 전미분

- 미분(differentials)의 개념은 둘 이상의 독립변수로 구성된 함수에도 적용될 수 있으며, 이 경우에도 함수에 포함된 독립변수들은 상호독립적이라고 가정함

- x_1과 x_2만큼 구입함으로써 얻을 수 있는 소비자의 총효용을 $U = U(x_1, x_2)$로 표시할 수 있다고 할 때, x_1이 dx_1만큼 변하고 x_2가 dx_2만큼 변했다면, 총효용의 증가분 dU는 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2$$
$$= U_1 dx_1 + U_2 dx_2$$

- U_i는 x_i의 변화에 대한 효용함수 U의 변화율이고, dx_i는 변수 x_i의 변동분이므로 $U_i dx_i$는 변수 x_i가 dx_i만큼 변할 때 총효용 U의 변동분이며, dU와 같은 변수를 전미분(total differential)이라 함

- $y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$의 함수가 주어져 있을 때 전미분 dy는 f의 편도함수인 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$을 구한 후 이를 다음 식에 대입하면 구할 수 있음

$$dy=f_1dx_1+f_2dx_2+\cdots+f_ndx_n$$

$u,\ v,\ w$가 각각 함수일 때

(a) $dk=0$ (k는 상수임)

(b) $d(cu^n)=cnu^{n-1}du$ (c는 상수임)

(c) $d(u\pm v)=du\pm dv,\ \ d(u\pm v\pm w)=du\pm dv\pm dw$

(d) $d(uv)=vdu+udv,\ \ d(uvw)=vwdu+uwdv+uvdw$

(e) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(vdu-udv)$ (단, $u\neq 0$)

다음 함수의 전미분 dy를 구하여라.

(a) $y = x_1^2 - 6x_1x_2^2$ (b) $y = \dfrac{x_1 - 2x_2}{3x_2^2}$

풀이

(a) $u = x_1^2,\ v = 6x_1x_2^2$ 으로 놓으면

$$dy = 2x_1dx_1 - 6x_2^2dx_1 - (6x_1)(2x_2)dx_2 = (2x_1 - 6x_2^2)dx_1 - (12x_1x_2)dx_2$$

(b) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(vdu - udv)$ 공식을 이용하면,

$$\begin{aligned}
dy &= \frac{1}{9x_2^4}[3x_2^2d(x_1 - 2x_2) - (x_1 - 2x_2)d(3x_2^2)] \\
&= \frac{1}{9x_2^4}[3x_2^2(dx_1 - 2dx_2) - (x_1 - 2x_2)(6x_2)dx_2] \\
&= \frac{1}{9x_2^4}[3x_2^2dx_1 - (6x_2^2 + 6x_1x_2 - 12x_2^2)dx_2] \\
&= \frac{1}{3x_2^2}dx_1 - \frac{2x_1 - 2x_2}{3x_2^3}dx_2
\end{aligned}$$

제 3 절 전도함수

- $y = f(x, z)$ 라는 함수가 주어져 있을 때 y 는 x 와 z 의 함수이지만 x 또한 z 의 함수라면, z 가 변하게 되면 y 에 직접적인 영향을 미치는 것은 물론 x 를 통해 y 에 간접적으로도 영향을 미치게 됨. 이와 같은 경우에는 전도함수(total derivative)를 사용

- $y = f(x, z)$ 가 주어져 있을 때 $x = g(z)$ 라 하자. y 의 전도함수를 구하기 위해서는 y 를 전미분하여 $dy = f_x dx + f_z dz$ 를 구한 다음 양변을 $dz (\neq 0)$ 로 나누어 줌

$$\frac{dy}{dz} = f_x \frac{dx}{dz} + f_z \frac{dz}{dz} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial y}{\partial z}$$

다음 함수들의 전도함수 $\frac{dy}{dw}$를 구하여라.

(a) $y = f(x,\ w) = x^2 + x - w^2,\ \ x = g(w) = w^3 - 2w^2$

(b) $y = f(x_1,\ x_2,\ w),\ \ x_1 = g(w),\ \ x_2 = h(w)$

$$\text{(a)}\quad \frac{dy}{dw} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dw} + \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$= (2x+1)(3w^2 - 4w) + (-2w)$$

$$= (2w^3 - 4w^2 + 1)(3w^2 - 4w) - 2w$$

$$\text{(b)}\quad \frac{dy}{dw} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dw} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dw} + \frac{\partial f}{\partial w} = f_1 g'(w) + f_2 h'(w) + f_w$$

제 4 절 음함수의 미분

- 방정식 $F(x, y)=0$ 을 통해 함수 $y=f(x)$ 를 정의할 수 있을 때 y를 x의 음함수(implicit function)라 함. 즉 $y=f(x)$의 그래프가 $F(x, y)=0$을 도시한 그래프의 부분집합일 때 함수 f 는 $F(x, y)=0$ 에 의해 묵시적(implicitly)으로 정의될 수 있음

- 만약 $F(x, y)=0$ 에 의해 묵시적으로 정의되는 함수를 $y=f(x)$ 의 형태로 나타내기가 불가능하면 음함수미분법(implicit differentiation)을 사용

(a) $F(x, y)=0$ 의 양변을 x에 대해 미분한다. 여기서 y는 x에 대해 미분가능한 함수로 간주

(b) $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구한다.

즉 $F(x, y)=0$ 을 x에 대해 미분하면,

$$F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$p + Q^2 + 2Q - 35 = 0$ 은 재화의 가격 p 와 수요량 Q 와의 관계를 나타내는 식이다. 가격 $p = 20$ 에서의 수요의 탄력성을 구하여라.

풀이

탄력성을 구하기 위해서는 $\dfrac{dQ}{dp}$ 가 필요하다. $\dfrac{dp}{dp} + 2Q\dfrac{dQ}{dp} + 2\dfrac{dQ}{dp} - 0 = 0$ 에서

$$\frac{dQ}{dp} = -\frac{1}{2Q+2}$$

이 됨을 알 수 있다. $p = 20$ 일 때의 Q 값은 $20 + Q^2 + 2Q - 35 = 0$ 에서 3 또는 -5 임을 알 수 있으나 수요는 0 보다 크거나 같아야 하므로 $Q = 3$ 을 이용해야 한다. 따라서 $p = 20$ 일 때의 탄력성은 다음과 같다.

$$e_p = \frac{dQ}{dp}\frac{p}{Q} = \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{20}{3}\right) = -\frac{5}{6}$$