5장 응력-변형률 관계

<기본 가정>
- 등방성
- 균질
- Baushinger effect 무시

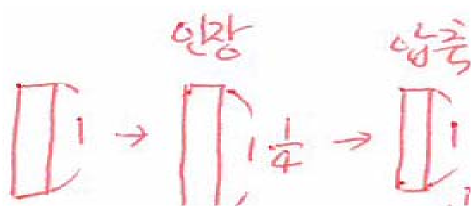
- 탄성상태 → 형상의 변화가 없음(최종적으로) → 변형경로가 중요하지 않음
- 소성상태 → 형상 변화 발생 → 변형경로가 중요(strain history, stress history)

＊ 예외 (특수한 경우)

모든 응력이 같은 비율로 증가(비례 부하, $\frac{d\sigma_I}{\sigma_I}=\frac{d\sigma_{II}}{\sigma_{II}}=\frac{d\sigma_{III}}{\sigma_{III}}$)될 때,

소성변형률은 부하경로에 무관하고 최종응력상태에 따라서만 달라짐

ex)



⇒ 응력-변형률 관계가 비선형적임(nonlinear)

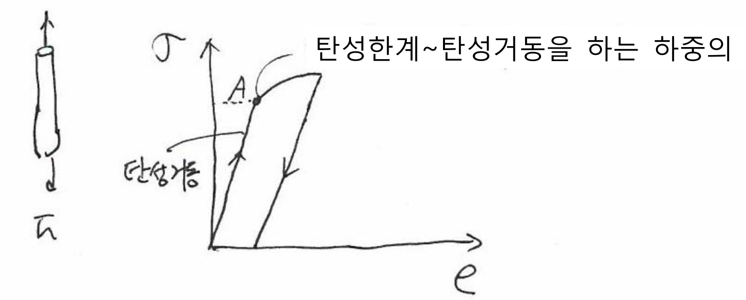
→ 금속의 변형을 고려할 때 응력은 변형률 증분과 관련(변형률증분의 합: 최종변형률)

total strain: $\epsilon = \int_1^{1\frac{1}{4}} \frac{dl}{l} + \int_{1\frac{1}{4}}^1 \frac{dl}{l} = 0$

변형률증분: $\epsilon = \int_1^{1\frac{1}{4}} \frac{dl}{l} + \int_{1\frac{1}{4}}^1 \left(-\frac{dl}{l}\right) = 2\ln\frac{5}{4} = 0.445$

5.2 탄성응력-변형률 관계

- 구성방정식 ~ 응력텐서, 변형률텐서, 물질의 성질(기계적 성질)을 관련짓는 식.
- 단축 인장 실험



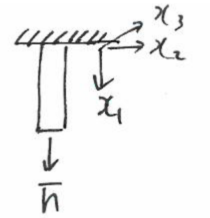
① 탄성 구간

- $Hook's\ law$: 하중이 탄성한계를 벗어나지 않으면 응력도 변형률에 비례함

$\sigma = E\epsilon \quad (E$: 탄성계수, $Young$ 계수)

- 1축 인장의 경우

$\sigma_{11} = Ee_{11}$



→ x_1방향으로는 인장변형이 발생하지만 x_2, x_3방향(x_1 수직방향)으로는 수축 발생.

ㄴ 수직 방향의 변형률과 인장방향의 변형률과의 비: $Poisson$ 비, ν)

$$\nu = \left|\frac{e_{22}}{e^{11}}\right| = \left|\frac{e_{33}}{e_{11}}\right|$$: 대부분 금속의 경우 약 0.33

- 3차원 응력 상태의 응력-변형률 관계(탄성상태 : $e_{ii} = \epsilon_{ii}$)

(탄성상태에서 응력의 크기가 작으므로 수직응력은 수직변형만, 전단응력은 전단변형만 유발시킴)

응력	x_1 방향 변형률	x_2 방향 변형률	x_3 방향 변형률
σ_{11}	$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$	$\epsilon_{22} = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E}$	$\epsilon_{33} = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E}$
σ_{22}	$\epsilon_{11} = -\frac{\nu\sigma_{22}}{E}$	$\epsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E}$	$\epsilon_{33} = -\frac{\nu\sigma_{22}}{E}$
σ_{33}	$\epsilon_{11} = -\frac{\nu\sigma_{33}}{E}$	$\epsilon_{22} = -\frac{\nu\sigma_{33}}{E}$	$\epsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}$

— ①

(※ $\nu\epsilon_{11} = -\epsilon_{22} \Rightarrow \epsilon_{11} = -\frac{1}{\nu}\epsilon_{22}$)

- 중첩에 의하여, x_1, x_2, x_3 방향의 변형률

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\
&= \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right] \\
\epsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right] \qquad \text{—— ②} \\
\epsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right]
\end{aligned}$$

- 전단응력에 의한 전단변형률

$$\sigma_{12} = G\gamma_{12}$$
$$\sigma_{23} = G\gamma_{23}$$
$$\sigma_{31} = G\gamma_{31}$$

G : 전단탄성계수
→ 비틀림 실험으로 구함

- 정수압력에 의한 체적변형률

$$B(\text{체적탄성계수}) = -\frac{P}{\Delta} = \frac{\sigma_m}{\Delta}$$

(P : 정수압, Δ : 체적변형률, $\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33}$)

- ② 식에서

$$\underbrace{\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33}}_{=\Delta} = \frac{1}{E}\left[(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) - 2\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right]$$
$$= \frac{1}{E}(3\sigma_m - 6\nu\sigma_m)$$
$$= \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m$$

따라서, $B = \dfrac{\sigma_m}{\Delta} = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ —— ③

- 등방체의 경우, 주변형축 방향과 주응력축 방향과 정확히 일치

$$\epsilon_I = \frac{1}{E}\left[\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III})\right]$$

$$\epsilon_{II} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{II} - \nu(\sigma_I + \sigma_{III})\right] \qquad \text{—— ④}$$

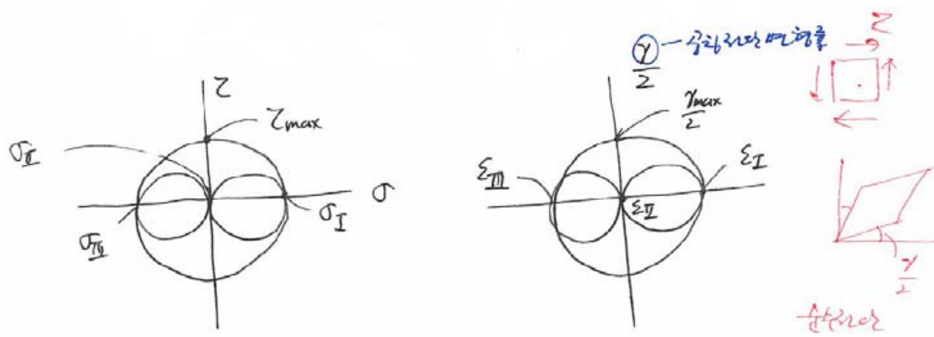
$$\epsilon_{III} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II})\right]$$

순수전단의 경우, 최대 전단응력 $\tau_{\max}$과 최대 전단변형률 $\gamma_{\max}$를 나타내면,

$$\tau_{\max} = \sigma_I = -\sigma_{III}, \;\; \sigma_{II} = 0$$

—— ⑤

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \epsilon_I = -\epsilon_{III}, \;\; \epsilon_{II} = 0$$



ϵ_{xy}(전단변형률텐서)$=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$

⑤ 식을 ④ 식에 대입,

$$\epsilon_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{(=\gamma_{ij})}$$

$$\tau_{\max} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\max}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$: 전단탄성계수(Shear modulus)

⇒ B, F, E, ν는 독립변수가 아닌 서로 종속됨

$\ast$ $Gneral\, Hooke's\ law$

- 지금까지 유도된 $G, B, \nu, E,$ 관계를 가지고 3축응력 및 변형률 상태에서 일반화된 $Hooke's\ law$는 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\
\epsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\
\epsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\
\epsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} = \left[\frac{(1+\nu)}{E}\right]\tau_{xy} \\
\epsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} = \left[\frac{(1+\nu)}{E}\right]\tau_{yz} \\
\epsilon_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{2G} = \left[\frac{(1+\nu)}{E}\right]\tau_{zx}
\end{aligned}\right] \quad \text{—— ①}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\
&\rightarrow \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} \\
&\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\
&\quad\;\; = 2G\epsilon_{xy} \\
&\therefore\ \epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}
\end{aligned}}$$

식 ①은,

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \left[\sigma_x/2G(1+\nu)\right] - (\nu/E)(\sigma_y + \sigma_z) \\
&= (\sigma_x/2G) - \nu\sigma_x/2G(1+\nu) - (\nu/E)(\sigma_y + \sigma_z) \\
&= (\sigma_x/2G) - (\nu/E)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
&= (\sigma_x/2G) - (\nu/E)J_1
\end{aligned}$$

ϵ_y, ϵ_z도 유사하게 정리되므로

$$\therefore\ \epsilon_{ij} = (\sigma_{ij}/2G) - \delta_{ij}(\nu/E)J_1$$

or $\epsilon_{ij} = (\sigma_{ij}'/2G) + \delta_{ij}[(1-2\nu)/E]\sigma_m$ (편차응력, 정수압응력을 이용한 표현)

($\because\ \epsilon_x = (\sigma_{ij} - \sigma_m/2G) + \sigma_m/2G + -3(\nu/E)\sigma_m$, p.84)

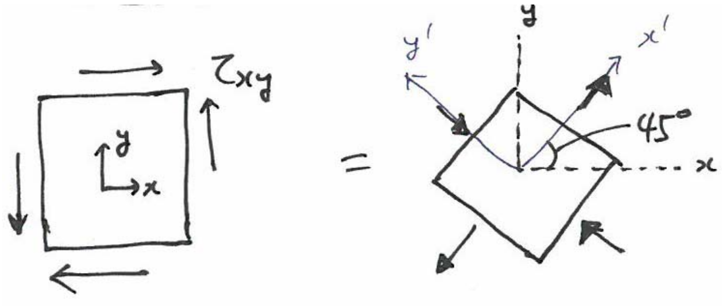
$\epsilon_{ij}' = \sigma_{ij}'/2G$: 편차변형률 텐서와 편차응력 텐서의 관계

∗ In generalized $Hooke's\ law$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad \text{—— ①}$$

A pure shearing stress τ_{xy} can be expressed in terms of the principal stresses acting on planes (x' and y' directions) making an angle of 45° with the shear planes.

; $\sigma_x{}' = \tau_{xy}$ and $\sigma_y{}' = -\tau_{xy}$



① : $\epsilon_{x'} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{x'} - \nu(\sigma_{y'} + \cancel{\sigma_{z'}})\right]$

$$= \frac{1}{E}\left[\tau_{xy} - \nu(-\tau_{xy})\right]$$

$$= \frac{1}{E}(1+\nu)\tau_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} \qquad \text{—— ②}$$

$$\rightarrow \epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}cos2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}sin2\theta \text{ (in Mohr circle)}$$

순수전단 상태이므로, $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$

$$\therefore\ \epsilon_{x'} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 90^\circ = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \qquad \text{—— ③}$$

③ → ②

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} \quad \Rightarrow \quad \therefore\ \gamma_{xy}(\text{공칭전단변형률}) = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$