삼각함수 7

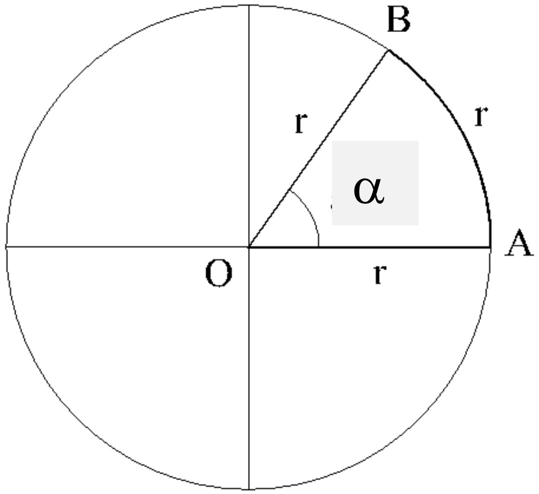
7.1 삼각함수의 정의와 성질

60 분법 : 직각의 1/90 인 "도" 를 단위

호도법 : 단위원에서 중심각에 대응되는 호의 길이인 "라디안" 을 단위

라디안의 흔히 생략

호도법 : 같은 라디안을 이용하여 각의 크기 나타내는 방법
(circular measure)



반지름의 길이가 r인 원의 시초선으로 부터 양의 방향으로 반지름의 길이와 동일한 호의 길이를 갖는 중심각 $\angle AOB = \alpha$ 를 1라디안 (radian)이라 한다

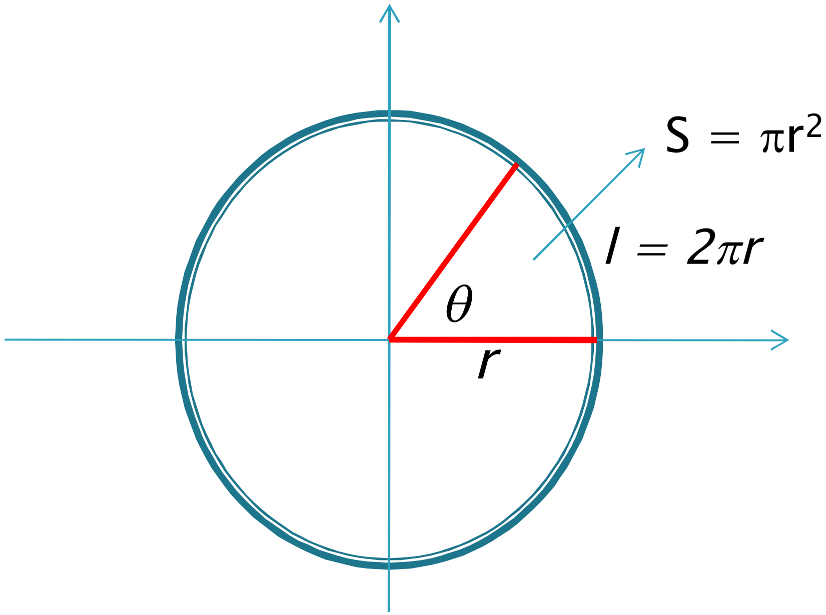
$$\alpha : 360^\circ = r : 2\pi r$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$$

반지름의 길이가 r인 원에서 중심각이 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l, 부채꼴의 넓이를 S라 하면,

호도법 이용

부채꼴의 호의 길이와 넓이



부채꼴의 길이(l)와 넓이(S)는

중심각의 크기에 비례

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$$

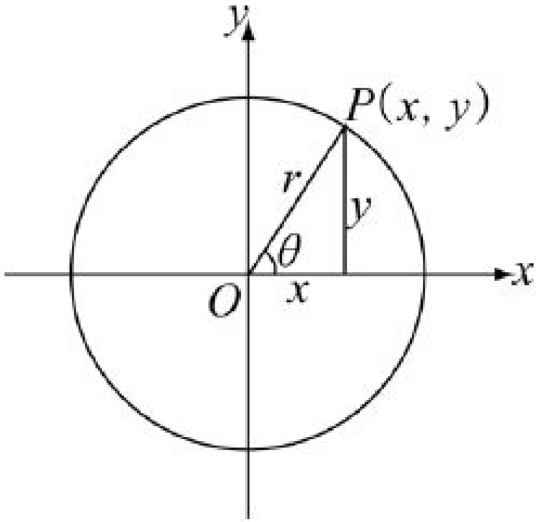
$$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

$l = r\theta$

$S = ½\, r^2\theta = ½\, rr\theta$

$= ½\, rl$

임의의 실수 θ 라이안에 대하여 삼각함수의 정의 :



$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

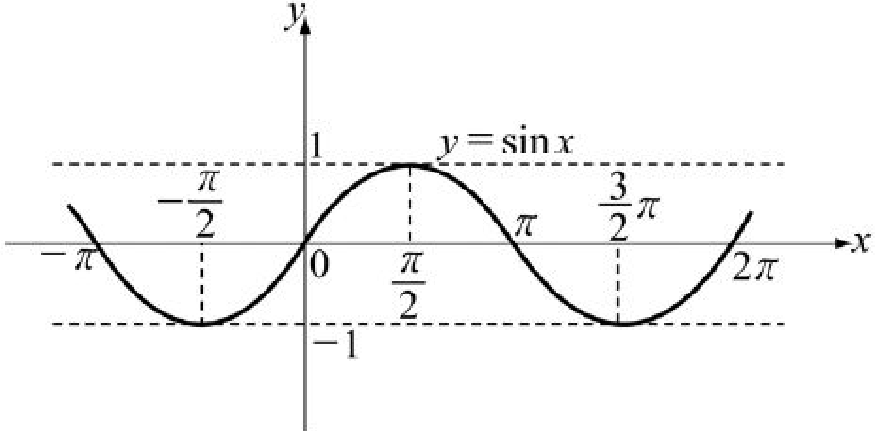
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x^2 + y^2 = 1$

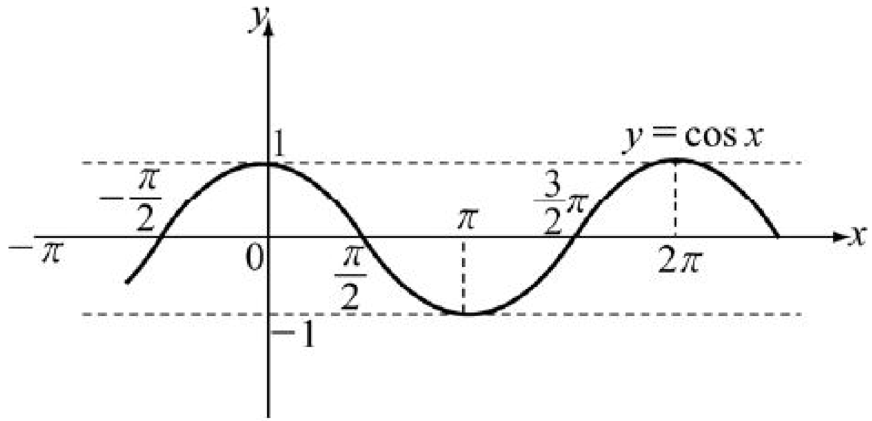
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta, \quad 1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$$

y = sinx



y = cosx

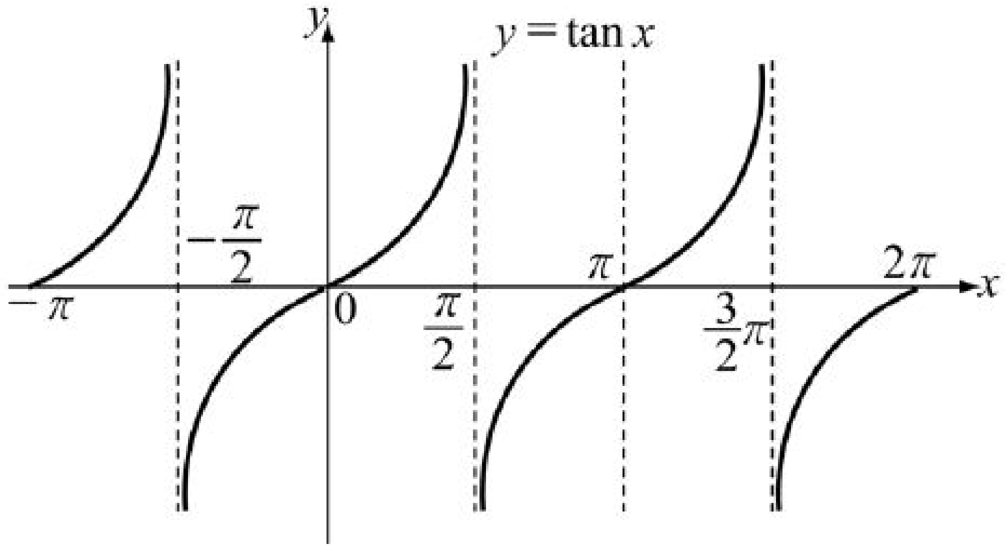


(1) 정의역은 모두 실수의 집합이고 치역은 모두 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ 이다.

(2) 모두 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) $y = \sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $y = \cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

y = tanx



(1) 정의역은 $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n은 정수)인 실수 x의 집합이고, 치역은 실수의 집합이다.

(2) 주기가 π인 주기함수이다.

(3) $y = \tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(4) 직선 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n은 정수)는 $y = \tan x$의 그래프의 점근선이다.

<표 2> 특수각에 대한 삼각비

60분법	호도법	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	-
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150°	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180°	π	0	-1	0
210°	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225°	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240°	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$
270°	$3\pi/2$	-1	0	-
300°	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
330°	$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta$$

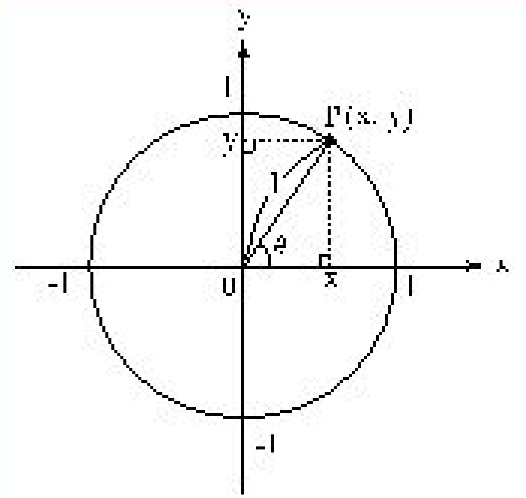
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$$

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta, \quad \tan(\pi+\theta) = \tan\theta$$

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta, \quad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta, \quad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

$\cos\theta = x$
$\sin\theta = y$
$\tan\theta = y/x$

P(x,y)



또한 $\angle XOP = \theta = \theta + 360^\circ \times n = \theta + 2n\pi$ 이므로

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta, \quad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta, \quad \tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$$

이다. 예를 들어,

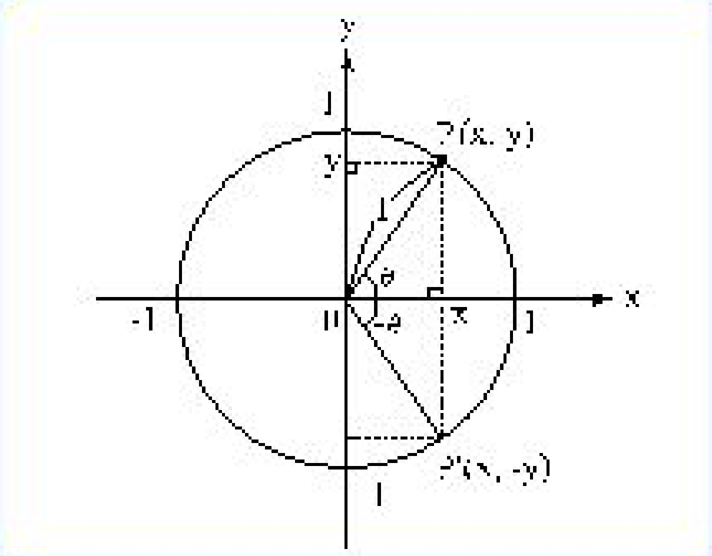
$$\cos\frac{25}{3}\pi = \cos\left(8\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(4\times(2\pi) + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$\cos\theta = x$
$\sin\theta = y$
$\tan\theta = y/x$

P(x,y)

→ P'(x,-y)

편각 $-\theta$에 대한 삼각비



$$\cos(-\theta) = x = \cos\theta,\quad \sin(-\theta) = -y = -\sin\theta,\quad \tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan\theta$$

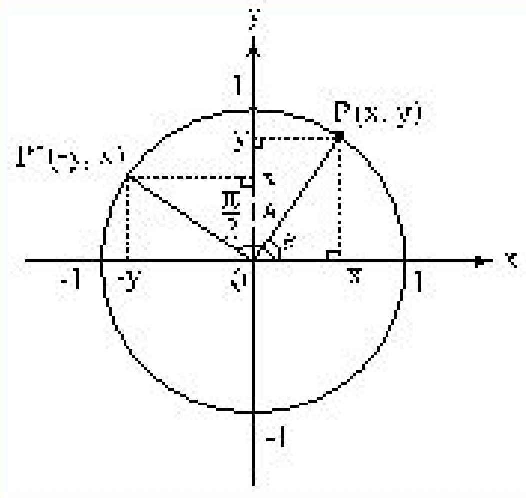
이다. 따라서 편각 θ와 $-\theta$에 대한 다음과 같은 삼각비의 관계를 얻는다.

$$\cos(-\theta) = \cos\theta,\quad \sin(-\theta) = -\sin\theta,\quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$\cos\theta = x$
$\sin\theta = y$
$\tan\theta = y/x$

P(x,y)

→ P''(−y,x)



편각 $\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각비

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -y = -\sin\theta,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = x = \cos\theta,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{x}{-y} = -\cot\theta$$

이다. 따라서 편각 θ와 $\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 다음과 같은 삼각비의 관계를 얻는다.

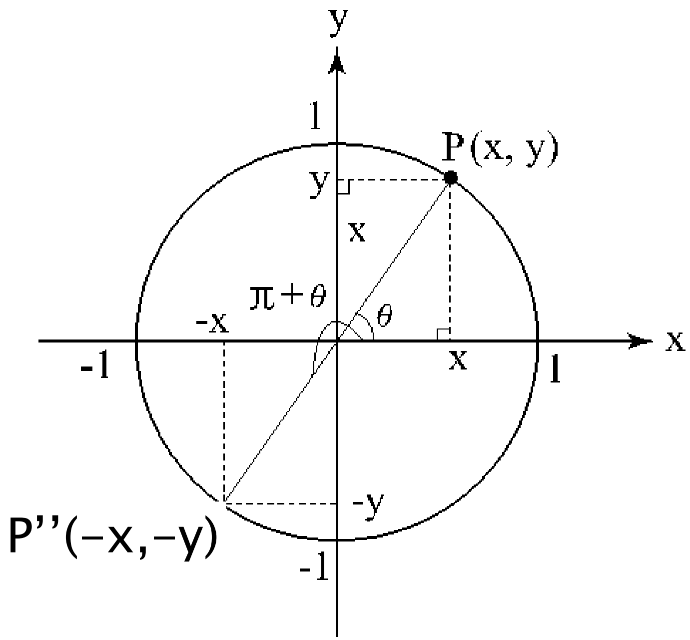
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta$$

$\cos\theta = x$
$\sin\theta = y$
$\tan\theta = y/x$

$P(x,y)$

$\rightarrow P'''(-x,-y)$

편각 $\pi+\theta$에 대한 삼각비



$\cos(\pi+\theta) = -x = -\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta) = -y = -\sin\theta$, $\tan(\pi+\theta) = \dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y} = \tan\theta$

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$, $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

(1) $\cos\theta = \frac{x}{r} \quad (r = \sqrt{x^2+y^2})$

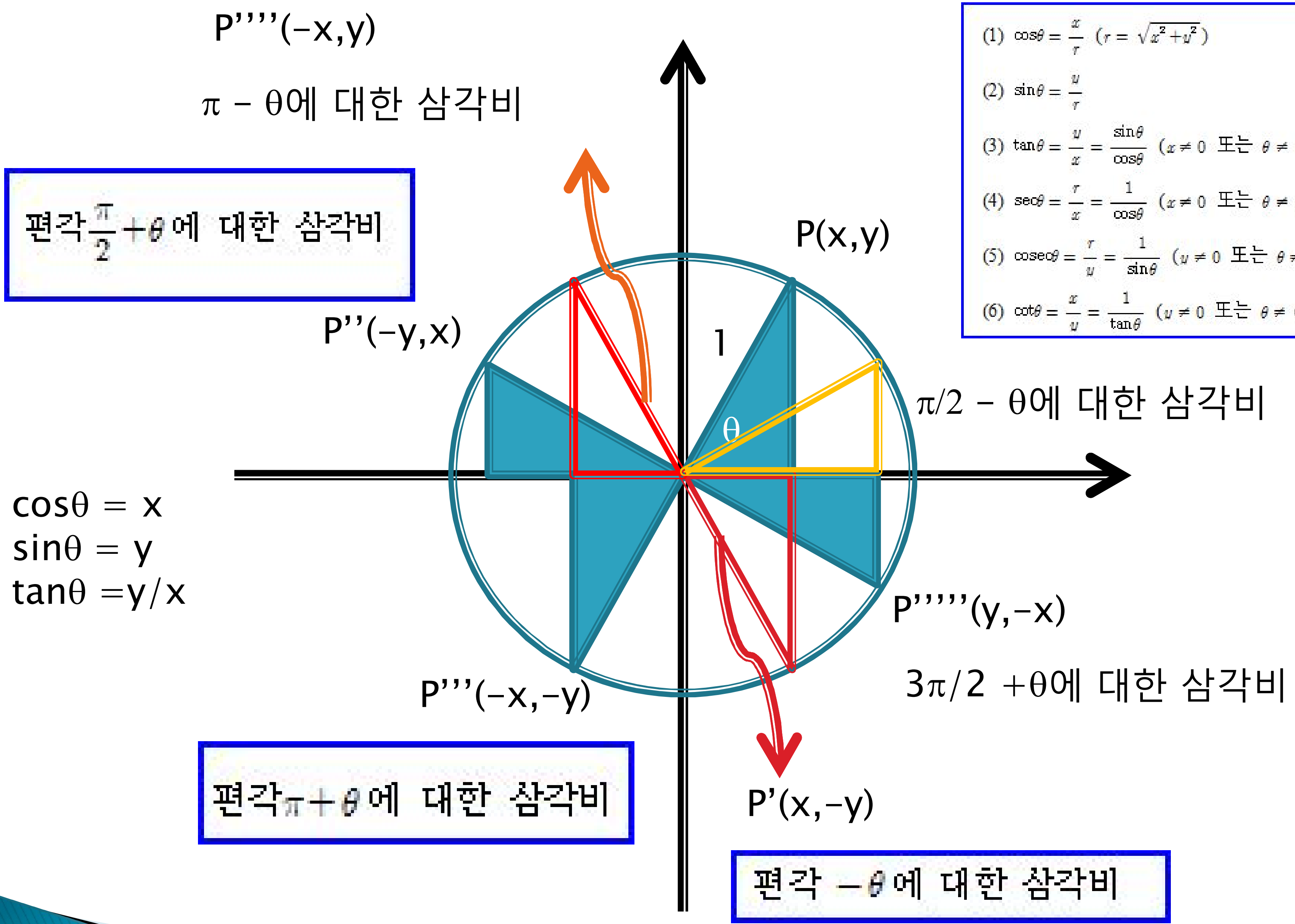
(2) $\sin\theta = \frac{y}{r}$

(3) $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (x \neq 0$ 또는 $\theta \neq \pi/2, 3\pi/2)$

(4) $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta} \quad (x \neq 0$ 또는 $\theta \neq \pi/2, 3\pi/2)$

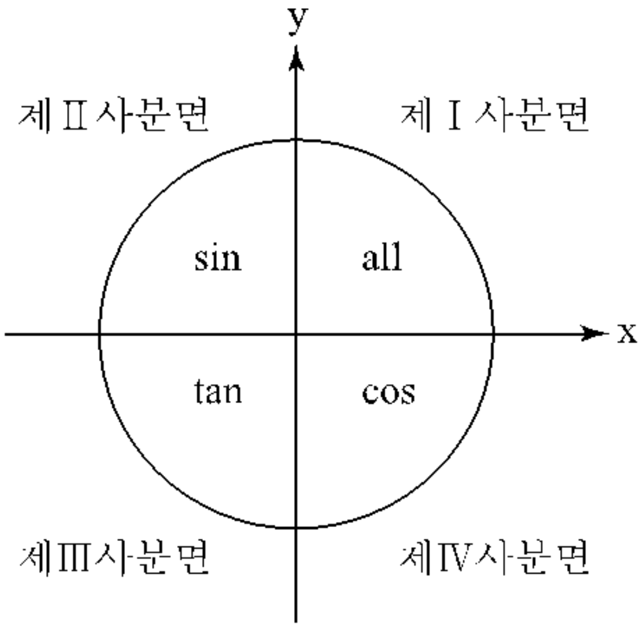
(5) $\mathrm{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta} \quad (y \neq 0$ 또는 $\theta \neq 0, \pi)$

(6) $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta} \quad (y \neq 0$ 또는 $\theta \neq 0, \pi)$



$\cos\theta = x$
$\sin\theta = y$
$\tan\theta = y/x$

삼각함수의 부호 **삼각비가 +인 사분면**



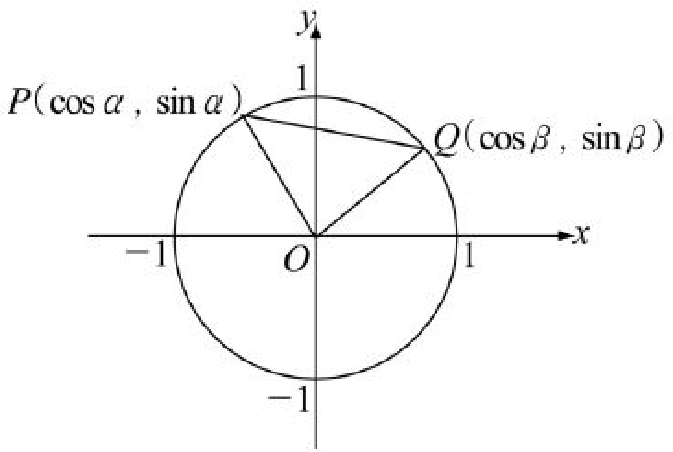
-x 좌표와 y좌표 위치에 따른 삼각함수의 부호

-secθ, cosecθ, cotθ 의 cosθ, sinθ, tanθ의 부호와 일치한다.

7.3 삼각함수의 덧셈정리

$\triangle POQ$에서 제이코사인법칙을 적용하면

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OP}\,\overline{OQ}\cos(\angle POQ)$$



$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

삼각함수의 공식과 방정식

덧셈정리

(7) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(8) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(9) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(10) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(11) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(12) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

예제 1 다음 삼각함수의 값을 구하라.

(1) $\sin 15°$ (2) $\tan 75°$

[풀이] (1) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(2) $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$$

$\cdots$ ○

$\sin 75^\circ$ 와 $\cos 15^\circ$ 를 구하여라

풀이

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3}\,)}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3}\,)}{4}$$

삼각함수의 공식과 방정식

덧셈정리

(7) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(8) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(9) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(10) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(11) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(12) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\alpha=\beta$

(13) $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

(14) $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(15) $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2배각의 공식

예제 1 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$일 때, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$의 값을 구하라.

$\cos(\pi/2+\alpha) = -x/1$
$\sin(\pi/2+\alpha) = y/1$

$\rightarrow \cos\alpha = -4/5$

[풀이] $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$에서 $\cos\alpha < 0$이므로 $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. 따라서

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25} \qquad \cdots ◦$$

삼각함수의 공식과 방정식

덧셈정리

(7) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(8) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(9) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(10) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(11) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(12) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\alpha=\beta$

(13) $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

(14) $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(15) $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2배각의 공식

(14)

(16) $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

(17) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

(18) $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

반각의 공식

α 대신에 $\dfrac{\alpha}{2}$ 를 대입

예제 2 다음 삼각함수의 값을 반각의 공식을 이용하여 구하여라.

(1) $\sin 15^\circ$　　　　(2) $\cos 15^\circ$

예제 2 다음 삼각함수의 값을 반각의 공식을 이용하여 구하여라.

(1) $\sin 15^\circ$　　　　(2) $\cos 15^\circ$

[풀이] (1) $\sin^2 15^\circ = \dfrac{1-\cos 30^\circ}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ 이므로

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos^2 15^\circ = \dfrac{1+\cos 30^\circ}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ 이므로

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cdots$ ○

삼각함수의 공식과 방정식

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

덧셈정리

(7) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(8) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(9) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(10) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(11) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(12) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\alpha=\beta$

(13) $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

(14) $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(15) $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2배각의 공식

(14)

(16) $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

(17) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

(18) $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

반각의 공식

α 대신에 $\dfrac{\alpha}{2}$ 를 대입

(19) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

(20) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

(21) $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

곱을 합으로

$\alpha=\dfrac{A+B}{2},\quad \beta=\dfrac{A-B}{2}$

(22) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(23) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(24) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(25) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

합을 곱으로

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}}$$

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}(\sin A + \sin B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$