

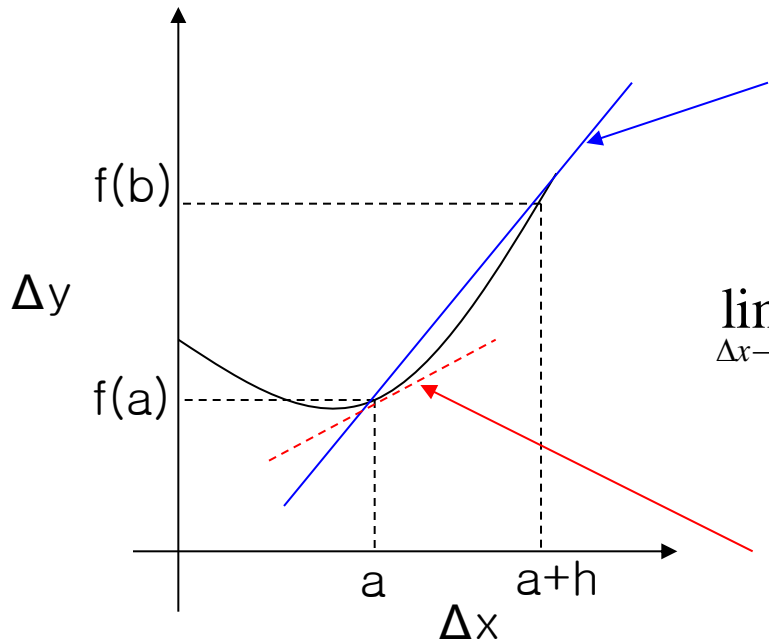
9장 함수의 미분

1. 함수의 미분

1) 미분계수, 평균변화율, 순간변화율

➤ 미분(Differentials)

- ✓ 사물의 변화를 분석할 수 있는 도구(변화율)
- ✓ 독립변수 1단위 변화에 대한 종속변수의 변화량을 측정한 것으로 독립변수의 변화량을 극소로 하였을 경우에 종속변수의 변화량이다.
- ✓ 평균변화율= $\Delta y/\Delta x$ =두 점을 이어주는 직선의 기울기
- ✓ 미분계수(=순간변화율)= $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ =접선의 기울기로서 특정 변수값에서의 순간변화율
- ✓ 도함수: 독립변수에 대응하는 순간변화율의 함수관계



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{평균 변화율}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{if } a+h = x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= f'(a) = \text{미분계수}$$

x=a에서의 순간변화율 또는 미분계수

<미분계수의 정의식>

$y=f(x)$ 에 대하여 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{if } a+h=x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= f'(a) = \text{미분계수}$$

$x=a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수

예제) $f(x) = \sqrt{x}$ 일 때 $x=2$ 에서의 미분계수를 구하라.
< 풀이 >

$$\text{방법1) } f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

방법2)

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\triangleright \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + kh) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + kh) - f(a)}{kh} \times k$$

$$= kf'(a)$$

$$\triangleright \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h + h^2) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h + h^2) - f(a)}{h(1 + h)} \times (1 + h)$$

$$= f'(a)$$

$$\begin{aligned}
\text{예 제)} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} \\
= & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h} \\
= & \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-h) - f(a)}{h} \right\} \\
= & f'(a) \times 2 - f'(a) \times (-1) = 3f'(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{예 제)} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-2h)}{h} \\
= & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a) + f(a) - f(a-2h)}{h} \\
= & \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-2h) - f(a)}{h} \right\} \\
= & 3f'(a) - (-2)f'(a) \\
= & 5f'(a)
\end{aligned}$$

정리)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + mh) - f(a + nh)}{h}$$
$$= (m - n) f'(a)$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

예제)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x^2) - f(a)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x^2) - f(a)}{(x - a)(x + a)} (x + a)$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x^2) - f(a)}{x^2 - a} (x + a)$$
$$= f'(a) \times 2a$$

예 제)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 f(x) - x^2 f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 (f(x) - f(a)) + a^2 f(a) - x^2 f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ a^2 \frac{(f(x) - f(a))}{x - a} - \frac{x^2 - a^2}{x - a} f(a) \right\} \\ &= a^2 f'(a) - 2af(a) \end{aligned}$$

2) 함수의 미분가능성

- 함수 $f(x)$ 가 연속함수이고 $x=a$ 에서 우도함수와 좌도함수가 일치할 때 $x=a$ 에서 미분가능하다.
- 즉, 미분계수가 존재하면 미분가능
미분계수의 존재는 미분계수의 정의식에 의해 구함

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

좌도함수

우도함수

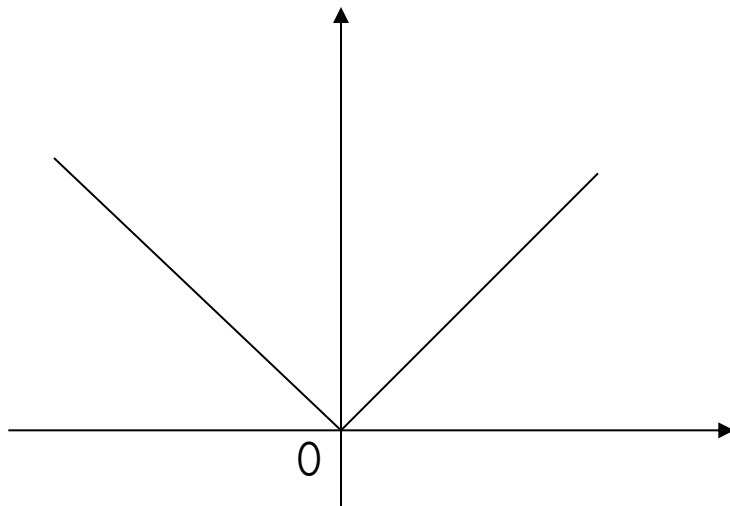
함수 $y=|x|$ 상의 점 $x=0$ 에서 미분가능한지를 판별하라.

< 풀이 >

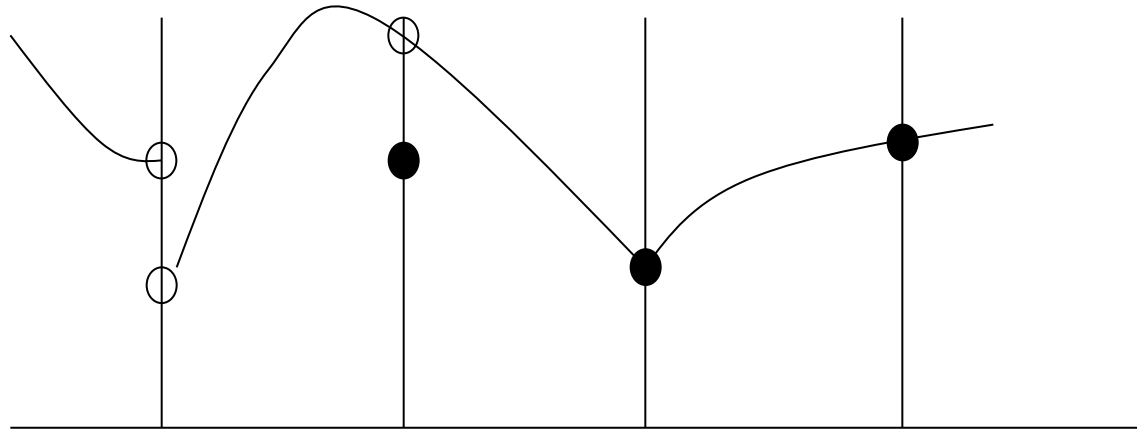
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

\therefore 우도함수 \neq 좌도함수이므로 미분불가능



- 미분이 가능하면 연속함수이지만 연속함수라고 해서 모두 미분 가능한 것은 아니다.
- 불연속이면 미분 불가능
- 첨점과 불연속점은 미분불가능



| | | | | |
|-------|---|---|---|---|
| 극한값: | X | O | O | O |
| 연속: | X | X | O | O |
| 미분가능: | X | X | X | O |

2. 도함수의 정의

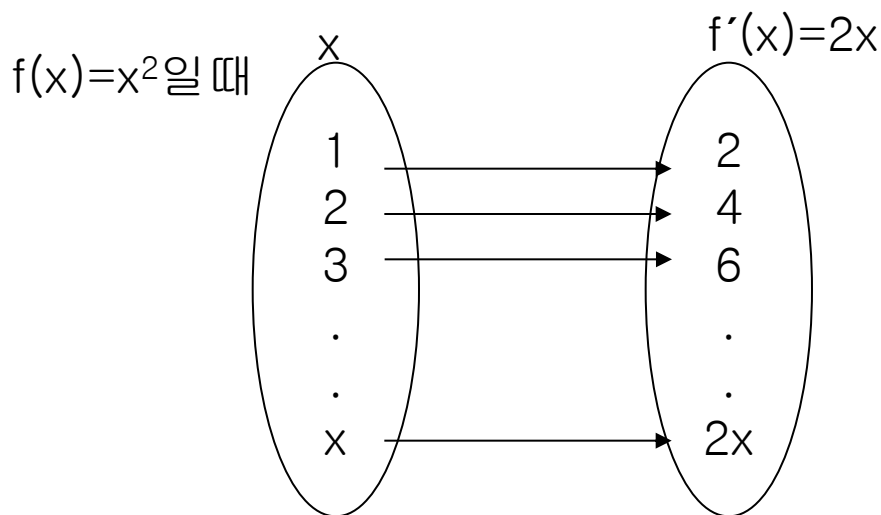
함수 $y=f(x)$ 에서

도함수를 구하는 것을 “미분한다”라고 하며
함수를 미분하라는 것은 도함수를 구하라는 것
임.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ 를 } x \text{에 관한 } y \text{의 도함수라고 하고}$$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D_x y$$



- 고차 도함수

- 함수의 도함수: (1차)도함수 $f'(x)=dy/dx$
- 도함수의 도함수: 2차도함수 $f''(x)=d^2y /dx^2$
- 2차도함수의 도함수: 3차도함수 $f'''(x)= d^3y /dx^3$
- (N-1)차도함수의 도함수: n차도함수 $f^{(n)}(x)= d^ny /dx^n$

- 도함수와 함수의 개략적 모양

- 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 1차도함수($f'(x)$)의 미분계수가 양수(+)이면 $f(x)$ 의 독립변수(x)가 증가(감소)할 때 종속변수(y)도 증가(감소)하고 있음을 의미-강증가함수
- 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 1차도함수($f'(x)$)의 미분계수가 음수(-)이면 $f(x)$ 의 독립변수(x)가 증가(감소)할 때 종속변수(y)도 감소(증가)하고 있음을 의미-강감소함수
- 1차도함수의 미분계수가 0이면 그 점에서 독립과 종속의 변화가 없음을 의미-극소점 또는 극대점(변곡점)
- 2차도함수($f''(x)$)의 미분계수가 양수이면 원점에 대하여 볼록함수, 음수이면 원점에 대하여 오목함수임.

3. 미분공식

a) $f(x) = c$ 에 대하여 c 가 상수일 때 $\frac{d}{dx}c = f'(x) = 0$

(증명) $\frac{d}{dx}c = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$

b) $f(x) = mx + b$ 에 대하여 (m, b 는 상수) $\frac{d}{dx}(mx+b) = f'(x) = m$

c) $f(x) = x^n$ 에 대하여 $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}x^n = f'(x) = nx^{n-1}$

d) $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}f(x) = cf'(x)$

e) $\frac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

f) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (단, $g(x) \neq 0$)

예제) 다음 함수를 미분하시오.

$$1) f(x) = 4x^2 + 3\sqrt{x}$$

$$2) f(x) = \sqrt{x}(x^4 + 3)$$

$$3) f(t) = (t^2 + 2)(t^3 - 5)$$

$$4) h(x) = x / (x - 1) \text{ (단, } x \neq 1 \text{)}$$

$$5) h(x) = (x^3 + 3) / \sqrt{x}$$

$$6) h(x) = (x^3 + x + 1) / (x^2 - 5) \text{ (단, } x^2 \neq 5 \text{)}$$

$$7) m(x) = (x^2 + 3)(x^3 + 2x^2 + 5)$$

$$8) T(x) = (x^2 + 1)(2x + 1)(3x + 1)$$

- 합성함수의 미분

- 연쇄의 법칙

- 두 개 이상의 함수가 합성된 경우에 사용할 수 있는 미분공식

- 두 함수 f 와 g 가 미분가능할 때 $y=(f \circ g)(x)=f(g(x))$ 로 정의될 때 그 도함수는 다음과 같다.

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad u = g(x) \text{라고 하면}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x)$$

$$\frac{df[g(x)]}{dx} = f'[g(x)]g'(x)$$

- 역함수의 미분

- 함수 $y=f(x)$ 가 쌍사함수이고 역함수를 $x=g(y)$ 라 하면 역함수의 도함수는 다음과 같다.

-

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{또는} \quad g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

다음 함수의 도함수를 구하시오.

$$1) h(x) = (x^2 - x + 7)^5$$

$$2) D(p) = \sqrt{5p-3}$$

$$3) f(x) = \left(\frac{x^5}{2x-1}\right)^{25} \text{ (단, } 2x \neq 1)$$

$$4) f(x) = (x+1)^3 (x^2-1)^2$$

$$5) f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

6) $y = (2x^2 + 1)^{10}$ 을 미분하시오.

7) $y = x^3 + 2x + 1$, $x = z^2 - \sqrt{z}$ 일 때 $\frac{dy}{dz}$ 를 구하라.

8) $z = 3y + 4y^2$, $y = x^2 + 1$ 일 때 $\frac{dz}{dx}$ 를 구하라.

예제) 재화에 대한 수요가 가격함수이고 가격은 높은 니플레이션 속에서 시간(t)에 따라 상승한다. 수요함수와 가격이 각각 다음과 같이 정의될 때 연쇄법칙을 사용하여 시간의 흐름에 따른 수요변화율을 구하라.

$$Q^d = D(p) = 1,000 - 5p - 0.1p^3$$

$$p = 2t^{\frac{3}{2}}$$

< 풀이 >

$$\frac{dQ^d}{dt} = \frac{dQ^d}{dp} \frac{dp}{dt}$$

$= (-0.3p^2 - 5)(3t^{\frac{1}{2}})$ 미분의 결과가 t에 관한 함수이므로

p를 $2t^{\frac{3}{2}}$ 으로 대체하면

$$= [-0.3(2t^{\frac{3}{2}})^2 - 5](3t^{\frac{1}{2}})$$

$$= -3.6t^{\frac{7}{2}} - 15t^{\frac{1}{2}}$$

예제) 다음 함수의 $\frac{dx}{dy}$ 가 존재하는지 여부를 밝히시오.

1) $y = x^3 + 2x$

2) $y = -x^4 + 100$

3) 함수 $y = x^3 + 2x$ 의 역함수를 구하고 역함수의 도함수를 구하시오.

4) $x = y\sqrt{1+y}$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

5) $x = t - 2, y = t^2$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

- 로그함수와 지수함수의 미분

[로그함수의 정의]

지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 가 주어졌을 때 임의의 양수 b 에 대하여 $a^x = b$ 를 만족하는 실수 x 를 $x = \log_a b$ 로 나타내고 a 를 밑으로 하는 b 의 로그라고 함.

따라서 $a^y = x$ 일 때 $y = \log_a x$ 가 성립하며 이를 로그함수라고 함.

[로그함수의 특성](단, $a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, p > 0, b > 0$)

$$1) \log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

$$2) \log_a \frac{1}{p} = -\log_a p$$

$$3) \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$$

$$4) \log_a p^r = r \log_a p$$

$$5) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

[로그함수의 특성] (단, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $p > 0$, $b > 0$)

$$6) \log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$7) \log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

$$8) a^{\log_a b} = b, \quad e^{\ln b} = b,$$

$$9) a^{\log_a b^x} = b^x, \quad e^{\ln b^x} = e^{x \ln b} = b^x$$

[로그함수의 미분]

함수 $f(x)$ 의 도함수가 존재할 때

$$a) y = \ln f(x) \text{의 도함수는 } \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$b) y = \log_a f(x) \text{의 도함수는 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a} \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[지수함수의 미분]

함수 $f(x)$ 의 도함수가 존재할 때

$$a) y = e^{f(x)} \text{의 도함수는 } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

$$b) y = a^{f(x)} \text{의 도함수는 } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} a^{f(x)} = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$$

예제) 다음 함수들의 도함수를 구하시오.

1) $f(x) = \ln(x^2 + x^4)$

2) $y = e^{rx}$

3) $y = x \cdot e^x$

4) $y = x \cdot e^{x^2}$

5) $y = \frac{1}{e^t + 1}$

6) $y = \ln(e^{3x} + x^2)$

7) $y = \frac{4-x}{\ln x}$

8) $q = \sqrt{1 + e^{2p}}$

도함수의 응용

1. 탄력성(elasticity)

독립변수의 변화량에 대하여 종속변수의 변화량을 측정하는 것으로 단위의 차이에 의해 탄력성의 크기가 달라지므로 이를 비율로 표준화하여 분석한 퍼센트 변화율.

1) 수요의 가격탄력성(E_p)

독립변수(가격)가 변화할 때 종속변수(수요량)가 얼마나 민감하게 반응하는지를 측정한 것(절대값으로 읽어줌)

① 호탄력성

수요함수 $Q_d = D(p)$ 에 대하여 (Q_d : 수요량 p : 가격)

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{\text{수요량의 변화율}}{\text{가격의 변화율}} \\ &= \frac{\frac{D(p + \Delta p) - D(p)}{D(p)}}{\frac{(p + \Delta p) - p}{p}} = \frac{\frac{\Delta D}{D(p)}}{\frac{\Delta p}{p}} \\ &= \frac{\Delta D}{\Delta p} \frac{p}{D(p)} \end{aligned}$$

② 점탄력성

$$E_p = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta D}{\Delta p} \frac{p}{D(p)} \right]$$
$$= D'(p) \frac{p}{D(p)}$$

$E_p = -\infty$: 완전탄력적 $E_p < -1$: 탄력적

$E_p = -1$: 단위탄력적 $-1 < E_p < 0$: 비탄력적

$E_p = 0$: 완전비탄력적

예제) 수요함수가 $Q_d = 20 - 2P$ 로 주어질 때 $P=2$ 에서 가격탄력성(점탄력성)을 구하라.

<풀이>

$$E_p = D'(p) \frac{p}{D(p)} \text{이므로}$$

$$D'(2) = -2, \quad \frac{2}{D(2)} = \frac{2}{16}$$

$$\therefore E_p = (-2) \frac{2}{16} = -\frac{1}{4}$$

가격이 1% 상승하면 수요량은 0.25% 하락함을 의미-비탄력적

예제) 복사용지에 대한 수요함수가 $D(p) = 50 - 2P$ 이다.

$P=5$ 에서 점탄력성을 구하고 어느 가격범위에서 수요가 탄력적인지 분석하라.

<풀이>

$$1) E_p = D'(p) \frac{P}{D(p)} \text{이므로 } D'(5) = -2, \quad \frac{5}{D(5)} = \frac{5}{40} \quad \therefore E_p = (-2) \frac{5}{40} = -\frac{1}{4}$$

가격이 1% 상승하면 수요량은 0.25% 하락함을 의미-비탄력적

2) 수요가 탄력적이기 위해서는 $E_p < -1$ 이어야 함

$$\therefore \frac{-2p}{50-2p} < -1 \Rightarrow 2p > 50 - 2p \Rightarrow 4p > 50 \text{이므로 } p > 12.5$$

예제) 닭고기 수요가 $D(p) = 100P^{-2}$ 로 추정된다. $P=1.284$ 에서 점탄력성을 구하라.

<풀이>

$$E_p = D'(p) \frac{P}{D(p)} \\ = -200p^{-3} \frac{p}{100 \cdot p^{-2}} = \frac{-200p^{-2}}{100 \cdot p^{-2}} = -2$$

가격이 1% 상승하면 수요량은 2% 하락함을 의미-탄력적
점탄력성은 가격과 상관없는 상수이다.

2. 한계의 개념

경영/경제학에서 한계의 개념은 함수 $y=f(x)$ 에서 x 가 1단위 변화할 때 y 의 변화량을 의미하며 즉 $dy/dx=f'(x)$ 이다.

① 효용함수

재화(X)의 사용량에 따른 효용(U)과의 함수관계

한계효용

효용함수 $U=U(x)$ 에서 도함수 $dU/dX=U'(x)$ 는 x 재의 한계효용
재화 1단위를 소비함에 따라 추가적인 총효용의 증가량

② 한계비용

총비용함수 $C=C(Q)$ 에서 도함수 $dC/dQ=C'(Q)$ 는 한계비용

생산물 1단위를 증가시킴에 따라 기업이 추가적으로 지출하는 총
비용

③ 한계수입

총수입함수 $R=R(Q)$ 에서 $dR/dQ=R'(Q)$ 는 한계수입

산출물(Q) 1단위를 판매함으로써 기업이 얻을 수 있는 추가적인
수입(R)

어느 제품에 대한 수요함수가 $Q = 1,000 - 2p$ 로 주어져 있을 때 총수입함수와 한계수입함수를 유도하여라.

풀이

총수입함수는 $TR = pQ$ 로 정의되므로 $p = 500 - \frac{1}{2}Q$ 라는 사실을 TR 에 대입하면 다음 결과가 도출된다.

$$TR = \left(500 - \frac{1}{2}Q\right)Q = 500Q - \frac{1}{2}Q^2$$

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 500 - Q$$

한국엔진은 새로 개발한 β 엔진의 생산비용을 추정한 결과 $C(Q) = \frac{Q^2}{2} + 20Q + 5,000$ (단위 : 만원)이 됨을 알 수 있었다.

- (a) 한계생산비용함수를 구하여라.
 (b) $Q = 1,000$ 일 때의 한계생산비용을 구하여라.
 (c) 실제 1,001번째 엔진의 생산에는 얼마가 소요되는가?
 (d) 평균생산비용함수를 도출하고 평균생산비용과 한계생산비용이 일치할 때의 생산량 x 를 구하여라.

풀이

(a) $C'(Q) = Q + 20$

(b) $C'(1,000) = 1,020$

(c) $C(1,001) - C(1,000)$

$$= \frac{(1,001)^2}{2} + (20)(1,001) - \frac{(1,000)^2}{2} - (20)(1,000)$$

$$= 501,000.5 + 20,020 - 500,000 - 20,000$$

$$= 1,020.5$$

(d) $\bar{C}(Q) = \frac{Q}{2} + 20 + \frac{5,000}{Q}$

$$\bar{C}(Q) = C'(Q)$$

$$\frac{Q}{2} + 20 + \frac{5,000}{Q} = Q + 20$$

$$\frac{5,000}{Q} = \frac{Q}{2} \Rightarrow Q^2 = 10,000 \Rightarrow Q = 100 \quad (\because Q > 0)$$

풀이

(a) $C'(Q) = Q + 20$

(b) $C'(1,000) = 1,020$

(c) $C(1,001) - C(1,000)$

$$= \frac{(1,001)^2}{2} + (20)(1,001) - \frac{(1,000)^2}{2} - (20)(1,000)$$

$$= 501,000.5 + 20,020 - 500,000 - 20,000$$

$$= 1,020.5$$

(d) $\bar{C}(Q) = \frac{Q}{2} + 20 + \frac{5,000}{Q}$

$$\bar{C}(Q) = C'(Q)$$

$$\frac{Q}{2} + 20 + \frac{5,000}{Q} = Q + 20$$

$$\frac{5,000}{Q} = \frac{Q}{2} \Rightarrow Q^2 = 10,000 \Rightarrow Q = 100 \quad (\because Q > 0)$$