

8장 함수의 극한과 연속성

1. 함수의 극한

1) 함수의 수렴과 발산

- 함수 $f(x)$ 에서 x 가 a 와 다른 값을 가지면서, a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 $x \rightarrow a$ 일때 함수 $f(x)$ 는 α 에 수렴한다고 하고

$$x \rightarrow a \text{ 일때 } f(x) \rightarrow \alpha \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

로 나타내며 α 를 $f(x)$ 의 극한값 또는 극한이라 함.

- 극한은 좌극한과 우극한이 일치할 때 존재(유일)

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \alpha \rightarrow \text{좌극한}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha \rightarrow \text{우극한}$$

➤ 함수의 발산

- 함수 $f(x)$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 의 값이 한없이 커지면 $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 는 양의 무한대로 발산 $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 또는

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

- 함수 $f(x)$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 의 값이 음수로서 그 절대값이 한없이 커지면 $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x)$ 는 음의 무한대로 발산 $x \rightarrow a$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 또는

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

2) 함수의 극한의 성질

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta, \quad (\alpha, \beta \text{는 일정}) \text{이면}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} C = C, \quad (C \text{는 상수})$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha \pm \beta$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta, \quad (\alpha, \beta \text{는 일정})$ 이면

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \alpha$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = \beta$$

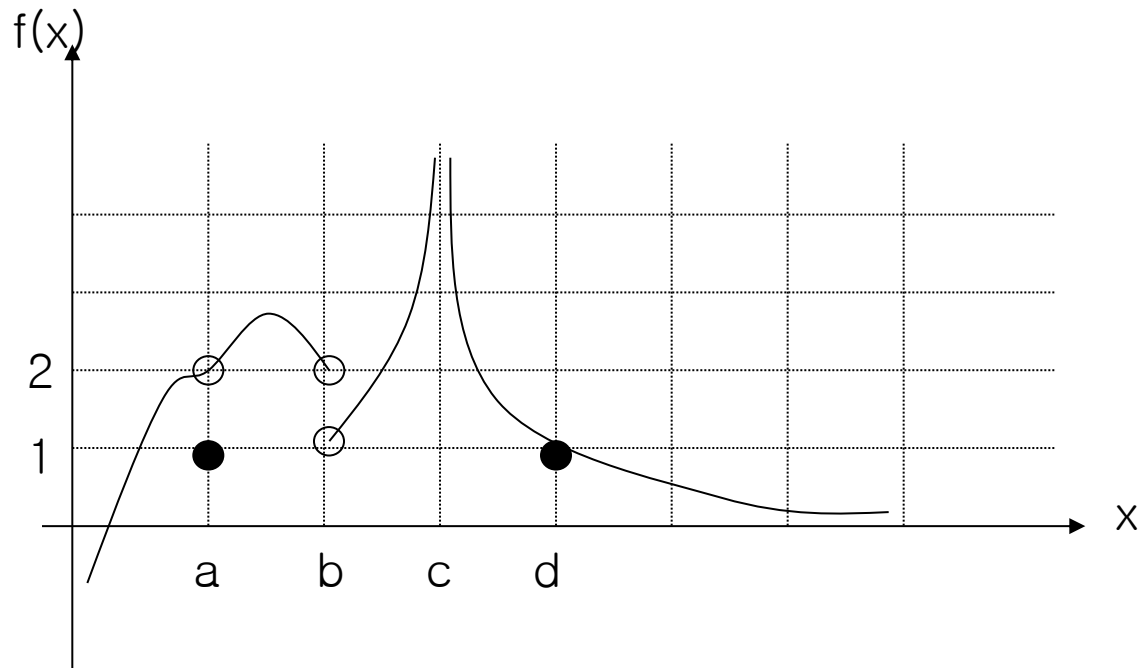
$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k\alpha$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha\beta$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

$$\triangleright \frac{k}{\infty} = 0 \quad (k = \text{상수}), \quad \frac{k}{0^+} = \infty, \quad \frac{k}{0^-} = -\infty \quad (0 \text{은 무한소})$$



$$f(a) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \text{극한값이 없다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow d} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

3) 극한값의 계산

➤ 0/0꼴의 극한값

- 분수식은 분모 분자를 인수분해하여 약분 계산
- 무리식은 분모 분자 중 무리식이 있는 쪽을 유리화하여 계산

➤ ∞/∞ 꼴

- 분수식은 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 나눈 후 계산
 - ✓ 분모 분자의 차수가 같으면 최고차항의 분모 분자의 계수가 극한
 - ✓ 분자의 차수가 높으면 양(또는 음)의 무한대로 발산
 - ✓ 분모의 차수가 높으면 0에 수렴
- 무리식은 근호 밖의 최고차항으로 분모 분자를 나눈 후 계산

예제)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + 2x + 3) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} = \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty \end{array} \right] \therefore \text{극한값은 없다}$$

▷ 부정형의 극한값 ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty \times \infty$ 꼴)

[$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴]

$$\text{예)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\text{예)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\text{예)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{5}$$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ -식 변형을 통하여 구한다(인수분해, 유리화, 통분, 약분 등)

$$\text{예)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$\text{예)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$\infty - \infty$ 꼴

$$\begin{aligned} \text{예)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{예)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) = 2$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} 3 =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} e^x =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} [x^2 - x] =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} [e^{x-1} \cdot \ln x] =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x+1} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x}{2x - 6} =$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) =$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{x} =$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} =$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} =$$

2. 함수의 연속성

1) 기본용어

$$\triangleright a \leq x \leq b \text{ (폐구간)} \Leftrightarrow \text{구간}[a, b]$$

$$\triangleright a < x < b \text{ (개구간)} \Leftrightarrow \text{구간}(a, b)$$

$$\triangleright a \leq x < b \text{ (반폐구간 또는 반개구간)} \Leftrightarrow [a, b)$$

$$\triangleright a \leq x \Leftrightarrow [a, \infty)$$

$$\triangleright x < b \Leftrightarrow (-\infty, b)$$

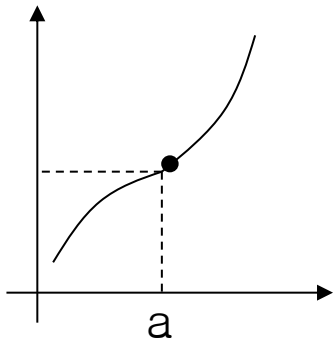
$$\triangleright -\infty < x < \infty \Leftrightarrow (-\infty, \infty)$$

2) 함수의 연속성에 대한 정의
 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이기 위해서는

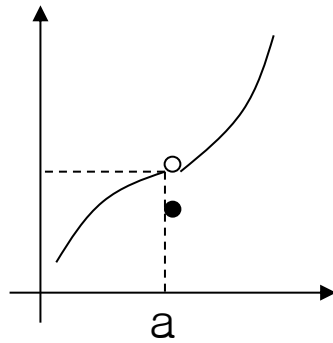
a) 함수 $f(x)$ 가 정의되고

b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하고

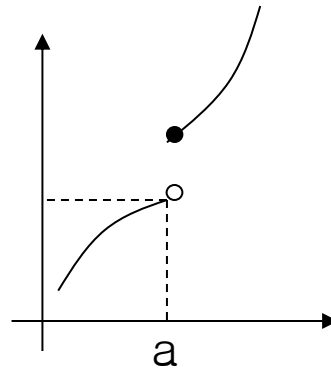
c) $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$



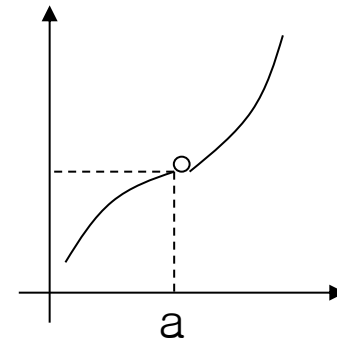
a,b,c 모두 충족
 a 에서 연속



a,b만 충족



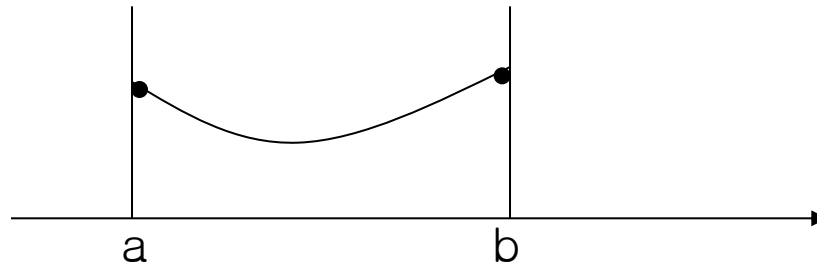
a만 충족



b만 충족

3) 구간에서의 연속

$y=f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 정의되고 $[a,b]$ 에서 연속이기 위해서는 구간의 모든 점에서 연속조건을 만족하고 정의구간의 양끝점 a 와 b 에서 $f(a)$ 와 우극한 a 가 일치하고 $f(b)$ 와 좌극한 b 가 일치할 때 구간 $[a,b]$ 에서 연속함수임.



예) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & (x \neq -1) \\ -1 & (x = -1) \end{cases}$ 일 때 연속성을 조사하라.

(풀이) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2 \neq f(-1)$ 이므로 $x = -1$ 에서 불연속

예제) $f(x) = x^2 + \frac{x^2}{(1+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$ 일 때

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 를 구하고 연속성을 밝히시오.

(풀이)--무한등비수열의 합

$$\text{if } x \neq 0 \quad f(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{(1+x^2)}} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2} = 1 + x^2$$

if $x = 0$ $f(0) = 0$ 이므로 $x = 0$ 에서 불연속

예제) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x^{2n} - 1)}{x^{2n} + 1}$ 의 연속성을 조사하라.

$$\text{참고) } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} r > 1 & : \infty \\ r = 1 & : 1 \\ -1 < r < 1 & : 0 \\ r \leq -1 & : \text{진동} \end{cases}$$

r^n 의 분수식: $|r| > 1, |r| < 1, r = 1, r = -1$ 로 구분하여 해결

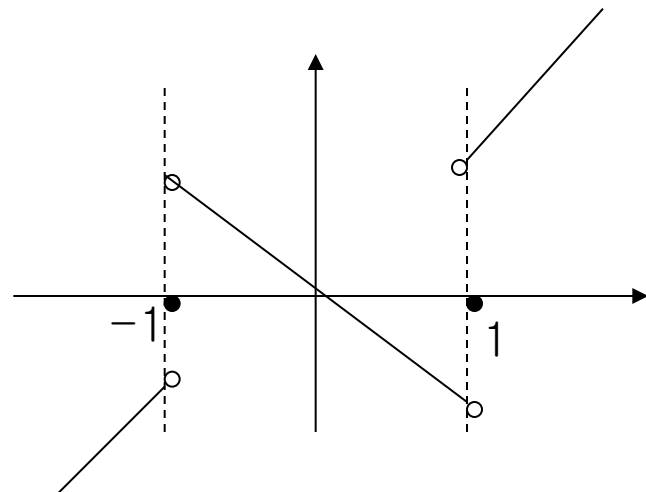
$$\text{if } |x| > 1 \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x^{2n}})}{(1 + \frac{1}{x^{2n}})} = x$$

$$\text{if } |x| < 1 \quad f(x) = -x$$

$$\text{if } x = 1 \quad f(x) = 0$$

$$\text{if } x = -1 \quad f(x) = 0$$

$\therefore x = \pm 1$ 에서 불연속

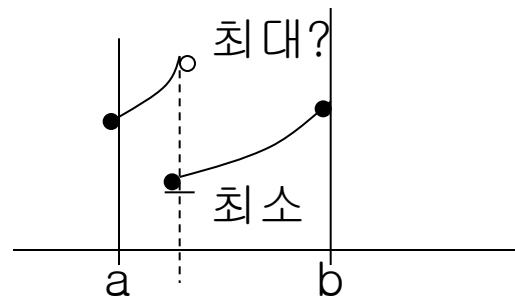
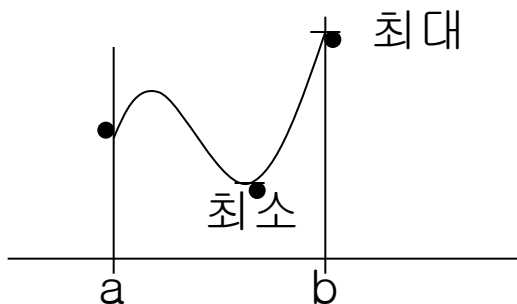


4) 함수의 연속성의 성질

- 연속함수 끼리 연산을 하여도 연속함수가 됨
- 여러 가지 함수의 연속
 - ✓ 다항함수: 모든 실수에서 연속
 - ✓ 분수함수: 분모가 0이 아닌 상태에서 연속
 - ✓ 무리함수: 근호안이 0보다 크거나 같을 때 연속
 - ✓ 로그함수: 진수가 0보다 클 때 연속

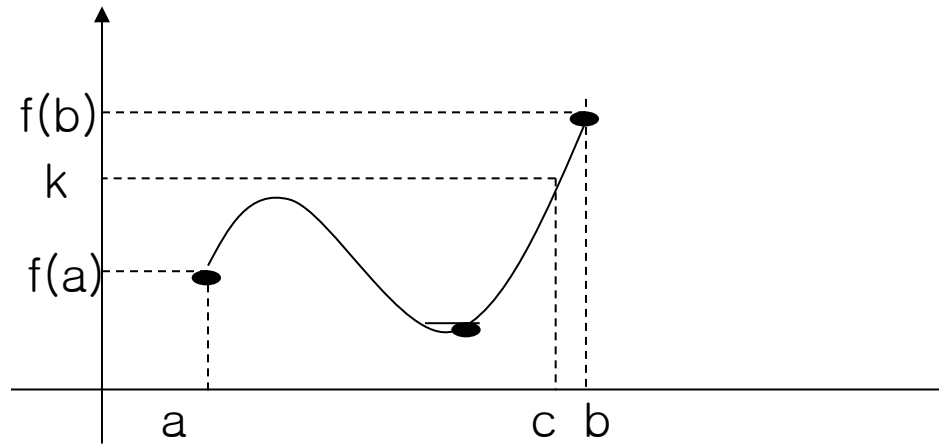
5) 함수의 최대 최소의 정리

- 함수 $f(x)$ 가 $[a,b]$ 에서 연속이면 $f(x)$ 는 구간 $[a,b]$ 에서 최대값과 최소값을 반드시 갖는다.



6) 중간값의 정리

- 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일 때 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값을 k 라 하면 $f(c)=k$ 가 되는 c 가 구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재한다.



예제) $\log_2 x + x - 2 = 0$ 에 대하여 구간 $[1, 8]$ 에서 실근이 존재함을 증명하라.

증명) $f(x) = \log_2 x + x - 2$ 는 로그함수와 다항함수의 합으로 이루어진 함수이므로 구간 $[1, 8]$ 에서 연속이다.

$$f(1) = -1 < 0 \text{이고}$$

$$f(8) = 9 > 0 \text{이므로 중간값 정리에 의하여}$$

$f(x) = 0$ 으로 만드는 x 값이 구간 $(1, 8)$ 에 적어도 하나 존재한다.

예제) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & (0 < |x| \leq 1) \\ a & (x = 0) \end{cases}$ 가 연속함수가 될 수 있도록 a 값을 정하십시오.

<풀이>

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{이어야 함 따라서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1$$

$$\therefore a = 1$$